جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى
الإدارة المركزية لشئون الكتب

الرياضيات

الصف الثانى الإعدادى

الفصل الدراسى الأول

تأليف

أ. عمر فؤاد جاب الله

أد. عفاف أبو الفتوح صالح — د. عصام وصفى روفائيل

أ. محمود ياسر الخطيب — أ. سيرافيم الياس اسكندر

إشراف علمى

مستشار الرياضيات

إشراف تربوى

(مركز تطوير المناهج)

طبعة ٢٠١٨ - ٢٠١٩

الاسم:.............................

الفصل:.............................

المدرسة:............................

العنوان:.............................

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

أبناءنا الأعزاء :

يسعدنا أن نقدم لكم كتاب الرياضيات للصف الثانى الإعدادى، وقد راعينا أن نجعل من دراستك للرياضيات عملًا ممتعًا ومفيدًا له تطبيقاته فى حياتكم العملية، ، وفى دراستكم للمواد الدراسية الأخرى، حتى تشعورا بأهمية دراسة الرياضيات وقيمتها وتقدروا ، دور علمائها، وقد اهتم هذا الكتاب بالأنشطة كعنصر أساسى، كما حاولنا تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة تساعدكم على تكوين المعرفة الرياضية، وفى نفس الوقت تساعدكم على اكتساب أساليب تفكير سليمة تدفعكم إلى الإبداع.

وقد روعى فى هذا الكتاب تقسيمه إلى وحدات دراسية، وكل وحدة إلى دروس، كما وظفنا الصور والألوان لتوضيح المفاهيم الرياضية وخواص الأشكال، مع مراعاة المحصول اللغوى لكم وما سبق أن تم دراسته فى الصفوف السابقة، كما راعينا فى مواطن كثيرة تدريبكم على أن تصلوا للمعلومات بأنفسكم لتنمية مهارة التعلم الذاتى لديكم ، كما تم توظيف الآلة الحاسبة والحاسب الآلى كلما كان ذلك مناسبًا داخل المحتوى.

وفى الجزء الخاص بالأنشطة و التدريبات :

يوجد تمارين على كل درس ، وتمارين عامة على الوحدة ، ونشاط خارجى ، واختبار فى نهاية كل وحدة ، وفى نهاية الفصل الدراسى اختبارات عامة تساعدك على مراجعة المقرر كاملاً.

نرجو أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه الخير لك ولمصرنا العزيزة.

المؤلفون

المحتويات

الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية

الوحدة الثانية: العلاقة بين متغيرين

الوحدة الثالثة: الإحصاء

الوحدة الرابعة: متوسطات المثلث و المثلث المتساوي الساقين

الوحدة الخامسة: التباين

الرموز الرياضية المستخدمة

ط	مجموعة الأعداد الطبيعية	⊥	عمودى على
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة	//	يوازى
ن	مجموعة الأعداد النسبية	$\overline{\text{أ ب}}$	القطعة المستقيمة أ ب
نَ	مجموعة الأعداد غير النسبية	$\overleftarrow{\text{أ ب}}$	الشعاع أ ب
ع	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$	المستقيم أ ب
$\sqrt{\text{أ}}$	الجذر التربيعى للعدد أ	ق (∠ ل)	قياس زاوية ل
$\sqrt[3]{\text{أ}}$	الجذر التكعيبى للعدد أ	~	تشابه
[أ ، ب]	فترة مغلقة	>	أكبر من
]أ ، ب[	فترة مفتوحة	≤	أكبر من أو يساوى
]أ ، ب]	فترة نصف مفتوحة (مغلقة)	<	أقل من
[أ ، ب[	فترة نصف مفتوحة (مغلقة)	≥	أقل من أو يساوى
[أ ، ∞[	فترة غير محدودة	ل(أ)	احتمال وقوع الحدث أ
≡	تطابق		

الوحدة الأولى

١

الأعداد الحقيقية

مراجعة

فكِّر وناقِش

مجموعات الأعداد

مجموعة أعداد العد : ع = {١، ٢، ٣، ...}

مجموعة الأعداد الطَّبيعية : ط = {٠، ١، ٢، ٣، ...} = ع ∪ {٠}

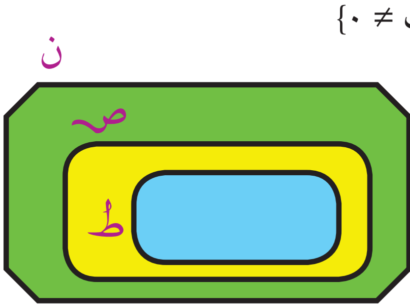
مجموعة الأعداد الصحيحة : ص = {...، ٣، ٢، ١، ٠، -١، -٢، -٣، ...}

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ص_{+} = {١، ٢، ٣، ...} = ع

مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة ص_{-} = {-١، -٢، -٣، ...}

ص = ص_{+} ∪ {٠} ∪ ص_{-}

مجموعة الأعداد النسبية ن = {$\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$: أ، ب ∈ ص، ب ≠ ٠}



ط ⊂ ص ⊂ ن

القيمةُ المطلقةُ للعددِ النسبيِّ:

|-٧| = ٧، |٣| = ٣، |٠| = ٠ ، |-$\frac{٥}{٣}$| = $\frac{٥}{٣}$

إذا كان |أ| = ٥ فإن أ = ±٥

الصورةُ القياسيةُ للعددِ النسبيِّ هي:

أ × $١٠^{\text{ن}}$ حيث ن ∈ ص ، ١ ≤ |أ| < ١٠

مثلاً العدد $٢٥,٣٢ \times ١٠^{٤}$ فى صورته القياسية = $٢,٥٣٢ \times ١٠^{٥}$

$٠,٠٠٠٥٣$ فى صورته القياسية = $٥,٣ \times ١٠^{-٤}$

العددُ النسبىُّ المربّع الكامل

هو العددُ الموجبُ الذى يمكن كتابته على صورة مربع عددٍ نسبىٍّ أى (عدد نسبى)^{٢}

مثل ١ ، ٤ ، ٢٥ ، $\frac{٩}{١٦}$ ، $٢\frac{١}{٤}$ ، ...

العددُ النسبى المكعب الكامل

هو العددُ النسبىُّ الذى يمكن كتابته على صورةِ مكعب عدد نسبى أى (عدد نسبى)^{٣}

مثل ١ ، ٨ ، -٢٧ ، -٢١٦ ، $\frac{٨}{١٢٥}$ ، ...

الجذرُ التَّربيعىُّ للعددِ النِّسبى المربع الكامل

- الجذر التربيعىُّ للعددِ النسبى الموجب أ هو العدد الذى مربعه يساوى أ
- $\sqrt{\text{صفر}}$ = صفر
- كلُّ عددٍ نسبىٍّ مربع كامل أ له جذران تربيعيان كل منهما معكوس جمعىّ للآخر وهما

$\sqrt{أ}$ ، $-\sqrt{أ}$

مثلاً العدد $\frac{١٦}{٢٥}$ له جذران تربيعيان هما $\frac{٤}{٥}$ ، $-\frac{٤}{٥}$

- $\sqrt{٩}$ يعنى الجذر التربيعىَّ الموجب للعدد ٩ وهو ٣

- $\sqrt{\left(\frac{أ}{ب}\right)^{٢}} = \left|\frac{أ}{ب}\right|$ أى أن $\sqrt{(-٧)^{٢}} = |-٧| = ٧$

الوحدة الأولى

الدرس الأول

الجذر التكعيبى للعدد النسبى

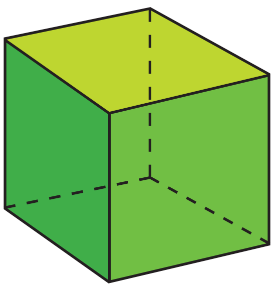
فكر وناقش

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد الجذر التَّكعيبى لعددٍ نسبيٍّ باستخدام التَّحليل.
- إيجاد الجذر التَّكعيبى لعدد نسبيٍّ باستخدام الآلة الحاسبة.
- حل معادلات تشمل إيجاد الجذر التَّكعيبى.
- حلّ تطبيقات على الجذر التَّكعيبى لعدد نسبى.

المصطلحات الأساسية

- جذر تكعيبى.



سبق أن تعلمت أن:

حجم المكعب = طول الحرف × نفسه × نفسه

أكمل

المكعبُ الذى طول حرفه ٧سم يكون حجمه = ... × .... × ....

= .... سم^{٣}

هيا نفكّر

إذا كان لدينا مكعبٌ حجمه ١٢٥سم^{٣}، فما طول حرفه؟

نبحثُ عن ثلاثة أعداد متساوية حاصل ضربها = ١٢٥

يمكن تحليل العدد ١٢٥ إلى عوامله الأولية .

١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥
١	

١٢٥ = ٥ × ٥×٥

∴ المكعبُ الذى حجمه ١٢٥سم^{٣}، يكون طول حرفه ٥سم.

تسمى ٥ الجذر التكعيبى للعدد ١٢٥ ، **وتكتب** $\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ٥

الجذرُ التكعيبىُّ للعددِ النسبىِّ أ هو العدد الذى مكعبه يساوى أ

- **يرمز للجذرِ التكعيبىِّ للعددِ النسبى أ بالرمز** $\sqrt[٣]{أ}$
- **الجذرُ التكعيبىُّ لعددٍ نسبىٍّ موجبٍ يكون موجبًا، مثلًا** $\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ٥
- **الجذرُ التكعيبىُّ لعددٍ نسبىٍّ سالبٍ يكون سالبًا، مثلًا** $\sqrt[٣]{-٨}$ = -٢ لماذا؟
- $\sqrt[٣]{\text{صفر}}$ = صفر
- $\sqrt[٣]{أ^{٣}}$ = أ

لإيجادِ الجذر التَّكعيبى للعددِ النسبىِّ المكعبِ الكامل:

- يمكن تحليلُ العدد إلى عوامله الأولية.
- يمكن استخدامُ الآلة الحاسبة.

لاحظ أن العددُ النسبىُّ المكعب الكامل له جذرٌ تكعيبىٌّ واحدٌ وهو عددٌ نسبىٌّ أيضًا، لماذا؟

أمثلة

١ استخدم التَّحليلَ لإيجاد قيمة كل من $\sqrt[3]{١٠٠٠}$ ، $\sqrt[3]{-٢١٦}$ ، $\sqrt[3]{٣\frac{٣}{٨}}$ وتحقَّق من صحة إجاباتك باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

١٠٠٠	٢	
٥٠٠	٢	٢
٢٥٠	٢	
١٢٥	٥	
٢٥	٥	٥
٥	٥	
١		

$\sqrt[3]{١٠٠٠} = ٢ \times ٥ = ١٠$

٢١٦	٢	
١٠٨	٢	٢
٥٤	٢	
٢٧	٣	
٩	٣	٣
٣	٣	
١		

$\sqrt[3]{-٢١٦} = -٢ \times ٣ = -٦$

$٣\frac{٣}{٨} = \frac{٢٧}{٨}$

٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

$\sqrt[3]{٣\frac{٣}{٨}} = \sqrt[3]{\frac{٢٧}{٨}} = \frac{٣}{٢}$

استخدم الآلةَ الحاسبةَ للتَّحقق من صحة إجابتك باستخدام $\sqrt[3]{\square}$

٢ أوجد طولَ نصف قطر الكرة التى حجمها ٤٨٥١سم^{٣} $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

الحل

حجم الكرة $= \frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣}

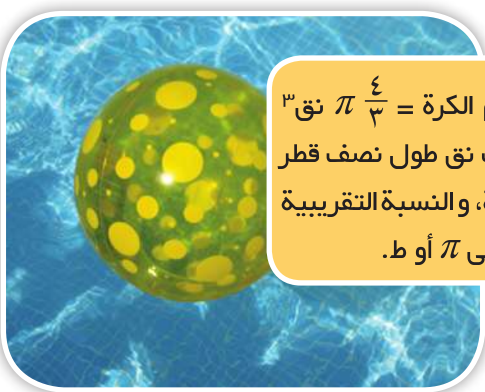
$٤٨٥١ = \frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧}$ نق^{٣}

نق^{٣} $= \frac{٤٨٥١ \times ٣ \times ٧}{٤ \times ٢٢} = \frac{٩٢٦١}{٨}$

∴ نق^{٣} $= \frac{٣^{٣} \times ٧^{٣}}{٢^{٣}}$

∴ نق $= \sqrt[3]{\frac{٣^{٣} \times ٧^{٣}}{٢^{٣}}} = ١٠,٥$ سم

٩٢٦١	٣
٣٠٨٧	٣
١٠٢٩	٣
٣٤٣	٧
٤٩	٧
٧	٧
١	



حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣} حيث نق طول نصف قطر الكرة، والنسبة التقريبية تسمى π أو ط.

تدرب

أوجد طولَ قطرِ الكرة التى حجمها ١١٣,٠٤سم^{٣} (π = ٣,١٤)

مثال

حل كلًّا من المعادلات الآتية فى ن:

أ س^{٣} = ٨

ب س^{٣} + ٩ = ٨

جـ (س - ٢)^{٣} = ١٢٥

د (٢س - ١)^{٣} - ١٠ = ٥٤

الحل

أ س^{٣} = ٨

س = $\sqrt[٣]{٨}$ = ٢

∴ مجموعة الحل = {٢}

ب س^{٣} + ٩ = ٨

س^{٣} = ٨ - ٩

س^{٣} = -١

س = $\sqrt[٣]{-١}$ = -١ ∴ مجموعة الحل = {-١}

جـ (س - ٢)^{٣} = ١٢٥

س - ٢ = $\sqrt[٣]{١٢٥}$

س - ٢ = ٥

س = ٧

∴ مجموعة الحل = {٧}

د (٢س - ١)^{٣} -١٠ = ٥٤

(٢س - ١)^{٣} = ٦٤

٢س - ١ = $\sqrt[٣]{٦٤}$

٢ س -١ = ٤

٢س = ٥

س = $\frac{٥}{٢}$ ∴ مجموعة الحل = {$\frac{٥}{٢}$}

تدرب

حلّ المعادلاتِ الآتيةَ فى ن: (س + ١)^{٣} = ٢٧ ، (س + ١)^{٣} = -٢٧

مجموعة الأعداد غير النسبية $ن'$

فكر وناقش

سوف تتعلم

- مجموعة الأعداد غير النسبية.

المصطلحات الأساسية

- عدد غير نسبى.

سبق أن علمت أن: العدد النسبى هو العددُ الذى يمكن وضعُه على الصورة $\frac{أ}{ب}$: حيث أ ∈ صـ، ب ∈ صـ، ب ≠ ٠

فمثلاً: عند حلِّ المعادلة ٤س^{٢} = ٢٥

فيكون س^{٢} = $\frac{٢٥}{٤}$

∴ س = ± $\frac{٥}{٢}$

ونلاحظ أن كلًّا من $\frac{٥}{٢}$ ، - $\frac{٥}{٢}$ عدد نسبى.

ولكن توجد كثيرٌ من الأعدادِ التى لايمكن وضعُها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ∈ صـ، ب ∈ صـ ، ب ≠ ٠

فمثلاً: عند حلِّ المعادلة س^{٢} = ٢ فإننا لا نستطيع إيجاد عدد نسبى مربعه يساوى ٢

العدد غير النسبى هو العدد الذى لايمكن وضعه على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ∈ صـ، ب ∈ صـ ، ب ≠ ٠

ومن أمثلةِ الأعدادِ غيرِ النسبيَّة:

أولاً: الجذور التربيعية للأعداد الموجبة التى ليست مربعات كاملة

مثل: $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٥}$ ، -$\sqrt{٦}$ ، $\sqrt{٧}$

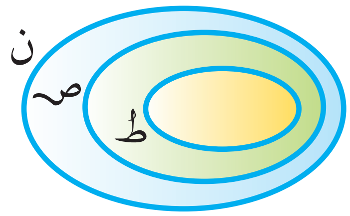
ثانيًا: الجذورُ التكعيبية للأعداد التى ليست مكعبات كاملة

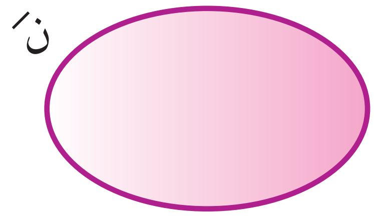
مثل: $\sqrt[٣]{٤}$ ، $\sqrt[٣]{-٢}$ ، $\sqrt[٣]{١١}$ ، ...

ثالثًا: النِّسبةُ التَّقريبية π

حيث إنه لايمكن إيجاد قيمة مضبوطة لأى من هذه الأعداد. لماذا؟

ومثل هذه الأعداد وغيرها تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد غير النسبية و يرمز لها بالرمز نَ .





ن ∩ نَ = ∅

فكّر : هل $\sqrt[٣]{-١}$ عدد غير نسبى ؟لماذا؟

مثال

أكمل **باستخدام أحد الرمزين ن أو نَ.**

أ $\sqrt[٣]{-٨} \in$ ....

ب $\sqrt{٦} \in$ ....

جـ $\pi \in$ ....

د $\sqrt{٦\frac{١}{٤}} \in$ ....

هـ صفر $\in$ ....

و $\sqrt[٣]{-٤} \in$ ....

ز $\left|\frac{-٣}{٥}\right| \in$ ....

ح $٤,٧ \times ١٠^{-٥} \in$ ....

ط $\sqrt[٣]{-٩} \in$ ....

ناقش معلمك فى حل المثال السابق

الوحدة الأولى

الدرس الثالث

إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى

فكر وناقش

سوف تتعلم

- إيجادُ قيمة تقريبيَّة للعدد غير النسبى.
- تمثيلُ العددِ غير النسبى على خطّ الأعداد.
- حلّ معادلات فى نَ.

هل تستطيعُ إيجاد عددين نسبيين ينحصرُ بينهما العددُ غيرُ النسبى $\sqrt{٢}$

نلاحظ أن $\sqrt{٢}$ ينحصرُ بين $\sqrt{١}$ ، $\sqrt{٤}$ **أى أن** $١ < \sqrt{٢} < ٢$

أى أن $\sqrt{٢} = ١ +$ كسر عشرى .

ولإيجادِ قيمةٍ تقريبيَّة للعدد $\sqrt{٢}$ نفحص قيمَ الأعداد التالية .

$(١,١)^٢ = ١,٢١$ ، $(١,٢)^٢ = ١,٤٤$ ، $(١,٣)^٢ = ١,٦٩$ ،

$(١,٤)^٢ = ١,٩٦$ ، $(١,٥)^٢ = ٢,٢٥$

$\because ١,٩٦ < ٢ < ٢,٢٥$

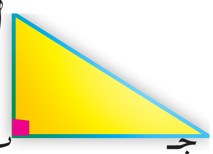
$\therefore ١,٤ < \sqrt{٢} < ١,٥$

أى أن $\sqrt{٢} = ١,٤ +$ كسر عشرى

أى أن $١,٤١ < \sqrt{٢} < ١,٤٢$

استخدم الآلةَ الحاسبةَ لتأكيد صحة إجابتك.

تمهيد: (فى الشكل المقابل) المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب **فيكون:**



$(أجـ)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢$

وتسمى بنظريه فيثاغورس وستدرس بالتفصيل بمنهج الهندسة

تمثيلُ العددِ غير النِّسبى على خطِّ الأعداد

كيف نحدِّد النقطةَ التى تمثل العدد $\sqrt{٢}$ على خطِّ الأعداد .

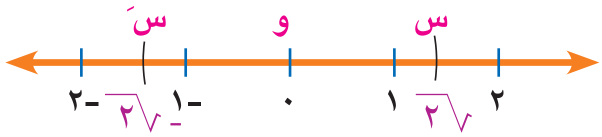
إذا رسمنا المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب،

والمتساوى الساقين بحيث أ ب = ب جـ = وحدة طول واحدة

فإن $(أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ = ١^٢ + ١^٢ = ٢$

$\therefore$ أ جـ $= \sqrt{٢}$ وحدة طول.

- ارسم خطَّ الأعدادِ واركز بسنِّ الفرجار فى نقطة و، وبفتحة تساوى طول $\overline{\text{أ جـ}}$ ارسم قوسًا يقطع خط الأعداد على يمين و فى نقطة س، وهذه النقطة تمثل العدد $\sqrt{2}$

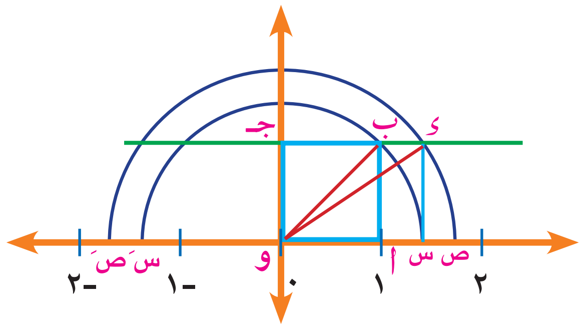


- يمكن بنفس فتحة الفرجار تحديد النقطة سَ التى تمثل العدد $-\sqrt{2}$ حيث سَ على يسار النقطة و

فكِّر **حدد النقطةَ التى تمثل العدد ٣ + $\sqrt{2}$ على خط الأعداد .**

نشاط

ارسم المربع و أ ب جـ الذى طول ضلعه وحدة طول.



طول قطره = $\sqrt{1+1}$ = $\sqrt{2}$ وحدة طول.

∴ و ب = $\sqrt{2}$

- اركز بالفرجار فى و ، وارسم نصف دائرة طول نصف قطرها = طول $\overline{\text{و ب}}$ = $\sqrt{2}$
- $\overleftrightarrow{\text{و أ}}$ ∩ نصف الدائرة = {س ، سَ}، حيث س تمثل العدد $\sqrt{2}$ ، سَ تمثل $-\sqrt{2}$
- ارسم $\overline{\text{س ى}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ويقطع $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ فى ى

(و ى)^2 = (و س)^2 + (س ى)^2 = $(\sqrt{2})^2$ + $(1)^2$ = ٣

∴ و ى = $\sqrt{3}$

- اركز بالفرجارِ فى و وبفتحة تساوى طول $\overline{\text{و ى}}$ ارسم نصف دائرة يقطع $\overleftrightarrow{\text{و أ}}$ فى ص ، صَ

∴ و ص = $\sqrt{3}$ **أى أن** النقطةَ ص تمثل العدد $\sqrt{3}$ ، والنقطة صَ تمثل العدد $-\sqrt{3}$

أكمل بنفس الطريقة لتمثيل الأعداد $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، ... وكذلك $-\sqrt{4}$ ، $-\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{6}$ ، ...

تدرب

١ **أوجد :**

أ عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{5}$

ب عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{١٢}$

جـ عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt[٣]{١٠}$

د عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt[٣]{-٢٠}$

٢ **اثبت أن**

أ $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨ ب $\sqrt[٣]{١٥}$ ينحصر بين ٢,٤ ، ٢,٥

٣ أوجد لأقرب جزء من مائة قيمة $\sqrt{١١}$

٤ أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt[٣]{٢}$

٥ ارسم خطَّ الأعدادِ وحدِّد عليه النقطةَ التى تمثِّل العددَ غير النسبى $\sqrt{٣}$

٦ ارسم خطَّ الأعدادِ وحدِّد عليه النقطة التى تمثل العدد غير النسبى ١ + $\sqrt{٢}$

مثال (١)

أوجد مجموعةَ حلِّ كلٍّ من المعادلات الآتية فى نَ:

أ $س^٢ = ٢$ ب $س^٣ = ٥$ جـ $\frac{٤}{٣} س^٢ = ١$ د $٠,٠٠١ س^٣ = -٨$

الحل

أ $س^٢ = ٢$

$\therefore س = \pm \sqrt{٢}$ مجموعة الحل = $\{-\sqrt{٢} ، \sqrt{٢}\}$

ب $س^٣ = ٥$

$\therefore س = \sqrt[٣]{٥}$ مجموعة الحل = $\{\sqrt[٣]{٥}\}$

جـ $\frac{٤}{٣} س^٢ = ١$

$\therefore \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٣} س^٢ = \frac{٣}{٤} \times ١$

$س^٢ = \frac{٣}{٤}$

$\therefore س = \pm \sqrt{\frac{٣}{٤}} = \pm \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٤}} = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ مجموعة الحل = $\{-\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\}$

د $٠,٠٠١ س^٣ = -٨$

$س^٣ = -\frac{٨}{٠,٠٠١} = -٨٠٠٠$

$\therefore س = \sqrt[٣]{-٨٠٠٠}$

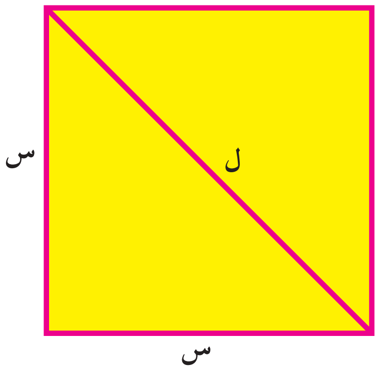
$= -٢٠ \notin$ نَ

مجموعة الحل المعادلة فى نَ = $\varnothing$

مثال (٢)

أوجد **كلًّا من طولِ ضلع وطول قطر مربع مساحته ٧سم^{٢}.**

الحل



إذا كان طولُ الضلع س سم فإن المساحة = س × س= س^{٢}

س^{٢} = ٧

∴ س = ± $\sqrt{٧}$ سم   ∴ س = $\sqrt{٧}$ سم لماذا؟

لإيجادِ طول قطر المربع: استخدم نظريةَ فيثاغورس

ل^{٢} = س^{٢} + س^{٢} حيث ل طول قطر المربع

∴ ل^{٢} = ١٤

∴ ل = ± $\sqrt{١٤}$ ∴ ل = $\sqrt{١٤}$ سم لماذا؟

مثال (٣)

دائرة مساحة سطحها ٣π سم^{٢} أوجد محيطها.

الحل

مساحة سطح الدائرة = π نق^{٢}

٣π = π نق^{٢}

∴ نق^{٢} = ٣

نق = $\sqrt{٣}$ سم   أو نق = - $\sqrt{٣}$ سم (مرفوض)

محيط الدائرة = ٢πنق = ٢π × $\sqrt{٣}$ = ٢$\sqrt{٣}$ π سم.

الوحدة الأولى

الدرس الرابع

مجموعة الأعداد الحقيقية ح

فكر وناقش

سبق أن درسنا مجموعةَ الأعدادِ النسبيَّة ن، ووجدنا أن هناك أعدادًا أخرى مثل $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt[٣]{٢}$ ، π، ... وهذه الأعدادُ تكون مجموعة الأعداد غير النسبية نَ

اتحاد المجموعتين ن، نَ يعطى مجموعةً جديدةً تسمى مجموعةَ الأعداد الحقيقية ، و يرمز لها بالرمز ح.

$$ح = ن \cup نَ$$

تأمَّل شكلَ فن المقابل تجد أن:

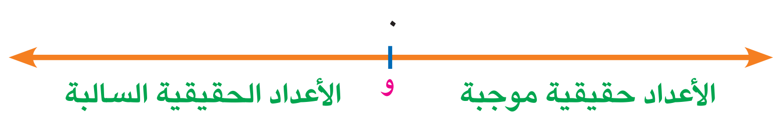
١ $ن \cap نَ = \varnothing$

٢ أى عدد طبيعى أو صحيح أو نسبى أو غير نسبى هو عدد حقيقى.

$$ط \subset ص \subset ن \subset ح \quad \text{وكذلك } نَ \subset ح$$

فكِّر :**أعطِ أمثلةً من عندك لأعداد حقيقيَّة بعضها نسبى وبعضها غير نسبى.**

٣ كلُّ عددٍ حقيقيٍّ تمثله نقطةٌ واحدةٌ على خطِّ الأعداد .



أولاً: العددُ صفر تمثله نقطة الأصل و.

ثانيًا: الأعدادُ الحقيقيةُ الموجبُة تمثلها جميعُ نقط خطِّ الأعداد على يمين و

ثالثًا: الأعدادُ الحقيقيةُ السالبة تمثلها جميعُ نقط خطِّ الأعداد على يسار و

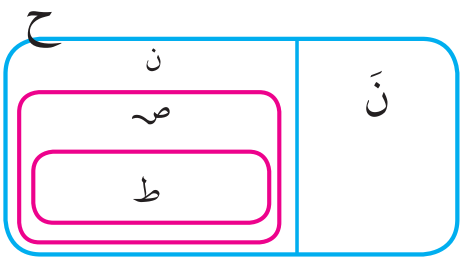
سوف تتعلم

- مجموعة الأعداد الحقيقية ح.
- العَلاقة بين مجموعات الأعداد ط، ص، ن، نَ ، ح.

المصطلحات الأساسية

- عدد حقيقى.

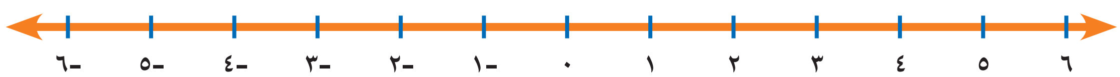
تدرب



١ **ضع** كلًّا من الأعدادِ الآتية فى مكانها المناسب على شكل ڤن المقابل.

$-\frac{١}{٢}$ ، -٤ ، ٩ ، $\sqrt{٥}$ ، $٠{,}٦$ ، $\frac{٧}{٩}$ ، $\sqrt[٣]{-٢}$ ، $\sqrt{١٦}$ ، ٠ ، ٥

٢ **حدِّد** على خطِّ الأعدادِ النقطةَ أ التى تمثِّل العدد $\sqrt[٣]{-٨}$ ، والنقطة ب التى تمثل العدد $\sqrt{٩}$ وأوجد طول $\overline{أ ب}$.



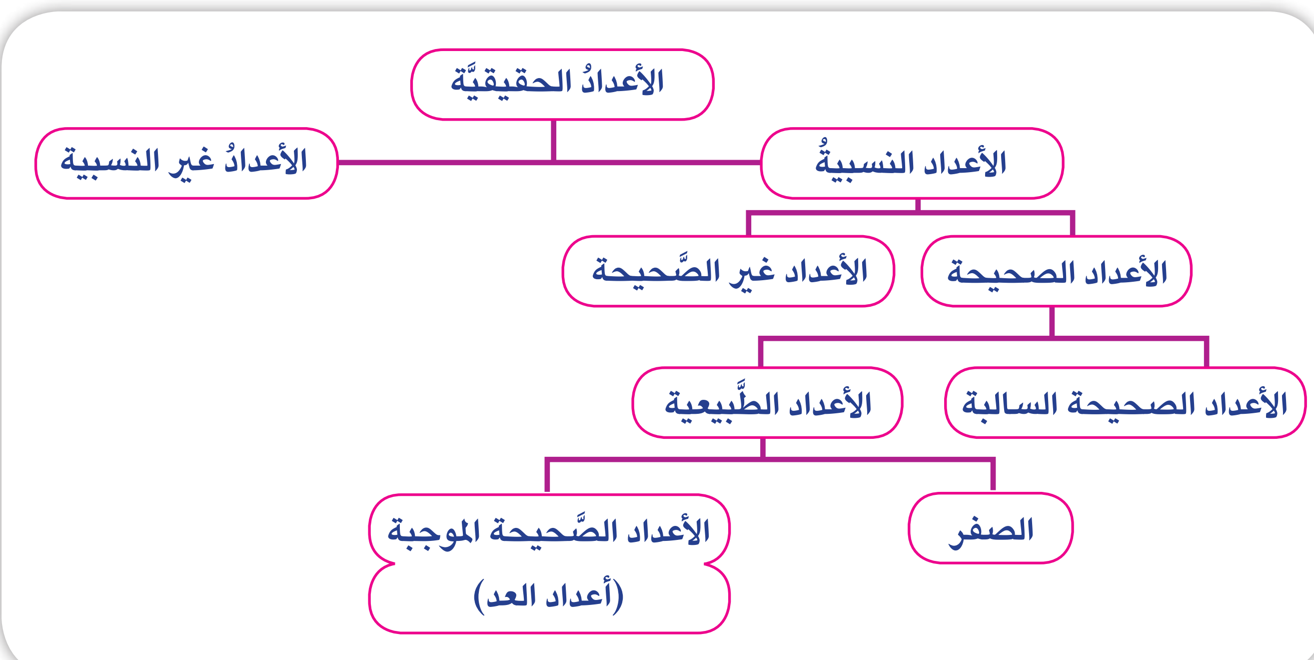
٣ وضِّح صحةَ أو خطأ كل من العبارتين:

أ كل عدد طبيعى هو عدد حقيقى موجب.

ب كل عدد صحيح هو عدد حقيقى.

لاحظ أن: $\sqrt[٣]{-١} = -١$ لأن $-١ \times -١ \times -١ = -١$

بينما $\sqrt{-١} \notin$ ح لأنه لايوجد عدد حقيقى إذا ضرب فى نفسه يعطى -١.



ناقش مع معلمك/معلمتك و زملائك: هل توجد أعدادٌ غيرُ حقيقية ؟

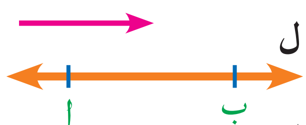
علاقة الترتيبِ فى ح

فكر وناقش

سوف تتعلم
- عَلاقة الترتيب فى ح.

المصطلحات الأساسية
- عَلاقة ترتيب .
- أكبر من .
- اصغر من .
- تساوى .
- ترتيب تصاعدى .
- ترتيب تنازلى .

إذا كانت أ، ب نقطتين تنتميان للمستقيم ل، وحدَّدنا اتجاهًا معينًا كالمبين بالسهم فإنه يمكن القول إن:



- النقطة ب تلى النقطة أ، أى تكون على يمينها.
- النقطة أ تسبق النقطة ب، أى تكون على يسارها.

وهكذا بالنسبة لجميع نقاط الخط المستقيم، فإذا علمنا أن كل نقطة من نقط الخط المستقيم تمثل عددًا حقيقيًّا فإننا نقول إن:

مجموعة الأعداد الحقيقية هى مجموعة مرتبة

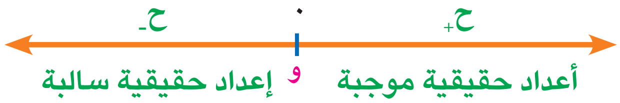
خواصّ الترتيب:

١ إذا كان س، ص عددين حقيقيين يمثلهما على خطِّ الأعدادِ النقطتان أ، ب على التَّرتيب فإنه توجد إحدى الحالات الثلاثة الآتية:

س = ص أ ≡ ب	ص س ب أ	س ص أ ب
أ تنطبق على ب ∴ س = ص	أ تسبق ب ∴ س < ص	أ تلى ب ∴ س > ص

٢ إذا كانت س عددًا حقيقيًّا تمثله النقطةُ أ على خطِّ الأعداد، وكانت و هى نقطة الأصل التى تمثِّل العدد صفر فإنه توجد إحدى الحالات الثلاثة الآتية:

س = ٠ أ ≡ و	٠ س و أ	س ٠ أ و
أ تنطبق على و ∴ س = ٠	أ على يمين و ∴ س > ٠ ويقال إن س عدد حقيقى موجب .	أ على يسار و ∴ س < ٠ ويقال إن س عدد حقيقى سالب .



مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة الموجبة: $ح_+$ = {س: س ∈ ح ، س > ٠}

مجموعة الأعدادِ الحقيقيَّة السالبة: $ح_-$ = {س: س ∈ ح ، س < ٠}

$ح = ح_+ \cup \{٠\} \cup ح_-$

لاحظ أن: مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة غير السالبة = $ح_+ \cup \{٠\}$ = {س : س ≥ ٠، س ∈ ح}

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة غير الموجبة = $ح_- \cup \{٠\}$ = {س : س ≤ ٠، س ∈ ح}

مثال (١)

رتِّب الأعدادَ الآتيَة تصاعديًّا $\sqrt{٢٧}$ ، $-\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، ٦ ، ٠ ، $\sqrt[٣]{-١}$

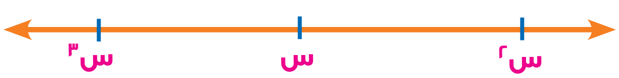
الحل

٦ = $\sqrt{٣٦}$ ، $\sqrt[٣]{-١}$ = -١ = $-\sqrt{١}$

الترتيبُ التصاعديُّ من الأصغرِ إلى الأكبر $-\sqrt{٤٥}$ ، $-\sqrt{١}$ ، ٠ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt{٣٦}$

أي $-\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt[٣]{-١}$ ، ٠ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، ٦

مثال (٢) من الشكل المقابل :



أوجد مجموعة الأعداد التى تنتمى إليها س حيث س عدد صحيح

الحل

من الشكل نلاحظ أن : $س^٢$ > س > $س^٣$

فعند اختيار س عدد صحيح سالب يحقق المتباينة السابقة

مثل : س = -٣ ⟸ ٩ > -٣ > -٢٧

∴ مجموعة الأعداد التى تنتمى إليها س هى $ص_-$ = { -١ ، -٢ ، -٣ ، .... }

اختر س عدد صحيح موجب ، هل تتحقق المتباينة ؟ ناقش معلمك

الوحدة الأولى

الدرس السادس

الفترات

فكر وناقش

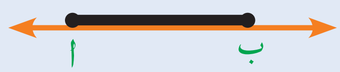
الفترة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

أولاً: الفتراتُ المحدودة

إذا كان أ ، ب ∈ ح ، أ < ب فإننا نعرف كلًّا من:

الفترة المغلقة [أ ، ب]

[أ، ب] = {س : أ ≤ س ≤ ب ، س ∈ ح}



[أ، ب] ⊂ ح وعناصرها أ، ب وجميع الأعداد الحقيقية بينهما

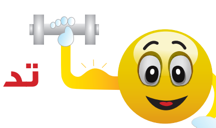
توضع دائرة مظللة عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين أ، ب وتظلل المنطقة بينهما على خط الأعداد .

الفترة المفتوحة]أ، ب[

]أ، ب [= {س: أ < س < ب، س ∈ ح}

]أ ، ب[⊂ ح وعناصرها هي جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين العددين أ ، ب .

توضع دائرة مفتوحة (غير مظللة) عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين أ، ب وتظلل المنطقة بينهما على خطِّ الأعداد



تدرب

اكتب كلًّا من [٣، ٥]،]٣، ٥[بطريقةِ الصِّفة المميزة ثم مثِّل كلًّا منهما على خط الأعداد.

سوف تتعلم

- الفترات المحدودة.
- الفترات غير المحدودة.
- العمليات على الفترات .

المصطلحات الأساسية

- فترة محدودة .
- فترة مغلقة .
- فترة مفتوحة .
- فترة نصف مفتوحة .
- فترة غير محدودة .
- اتحاد .
- تقاطع .
- فرق .
- مكملة .

الفترات نصف المفتوحة أو (نصف المغلقة)

[أ ، ب[

[أ ، ب[= {س : أ ≤ س < ب ، س ∈ ح}

[أ ، ب[⊂ ح عناصرها العدد أ وجميع الأعداد المحصورة بين أ ، ب .

]أ ، ب]

]أ ، ب] = {س : أ < س ≤ ب ، س ∈ ح}

]أ ، ب] ⊂ ح عناصرها العدد ب وجميع الأعداد المحصورة بين أ ، ب .

تدرب

اكتب كلًّا من الفترتين [٣ ، ٥[،]٣، ٥] بطريقةِ الصِّفة المميزة ، و مثل كلًّا منهما على خطِّ الأعداد.

مثال (١)

مثِّل بيانيًّا على خطِّ الأعداد كلًّا من: [-١، ٤] ،]-١، ٤[،]-١، ٤]، {-١، ٤}

الحل

[-١، ٤]

فترة مغلقة

]-١، ٤[

فترة مفتوحة

]-١، ٤]

فترة نصف مفتوحة

{-١، ٤}

مجموعة

ناقِشْ مع معلمك / معلمتك و زملائك: هل الفترةُ مجموعةٌ منتهيةٌ أم غيرُ منتهيةٍ؟

مثال (٢)

١ **اكتب** على صورةِ فترة، كلًّا من المجموعاتِ الآتية، ومثِّل كلًّا منها على خطِّ الأعداد:

أ سـ = {س : ٢ < س < ٥ ، س ∈ ح}

ب سـ = {س : -٢ ≤ س < ٣ ، س ∈ ح}

جـ سـ = {س : ٠ ≤ س ≤ ٤، س ∈ ح}

د سـ = {س : -٣ < س ≤ -١ ، س ∈ ح}

الحل

أ سـ =] ٢ ، ٥ [

ب سـ = [-٢ ، ٣ [

جـ سـ = [٠ ، ٤]

د سـ =] -٣ ، -١]

٢ **ضع** الرمزَ المناسبَ ∈ أو ∉ لتكون العبارة صحيحة:

أ ٣ ....]-١، ٣[

ب -٢ ....]-١، ٣[

جـ $\frac{١}{٢}$ ....]٠، ١[

د $\sqrt{٢}$ .... [١، ٢]

هـ ٤ .... [٠، ٥]

و $\sqrt[٣]{-٨}$ .... [-١، ٢]

ز |-٥| .... [٤، ٦]

ح ٣,٢ × $١٠^{-٥}$ ....]٠، ١[

الحل

أ ∉ ب ∉ جـ ∈ د ∈

هـ ∈ و ∉ ز ∈ ح ∈

٣ **اكتب** الفترةَ التى يعبِّر عنها كلٌّ من الأشكالِ الآتية:

أ

جـ

ب

د

الحل

أ [٠، ٣]

ب] -٤، ١]

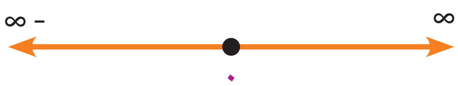
جـ [-٣، -١[

د] ٠، ٦ [

ثانيًا: الفتراتُ غيرُ المحدودة

تعلم أن: خط الأعداد الحقيقيَّة مهما امتد من جهتيه فإنه يوجد أعداد حقيقية موجبة من جهة اليمين وسالبة من جهة اليسار تقع على هذا الخط.

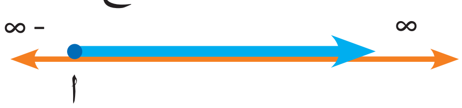
- الرمز (∞) ويقرأ (لانهاية) و هو أكبر من أى عددٍ حقيقيٍّ يمكن تصورُه ، ∞ ∉ ح
- الرمز (-∞) ويقرأ (سالب لانهاية) و هو أصغرُ من أى عددٍ حقيقيٍّ يمكن تصوره ، -∞ ∉ ح
- الرمزان ∞ ، -∞ لاتوجد نقط تمثلهما على خطِّ الأعداد الحقيقية، وهما امتداد لخط الأعداد من جهتيه.



وإذا كان أ عددًا حقيقيًا فإننا نعرفُ الفتراتِ غيرَ المحدودة التالية:

الفترة [أ ، ∞[

[أ، ∞[= {س : س ≥ أ ، س ∈ ح}



وهى تعبِّر عن العددِ أ وجميع الأعداد الحقيقيَّة أكبر من أ.

الفترة]-∞ ، أ]

]-∞ ، أ] = {س : س ≤ أ ، س ∈ ح}

وهى تعبر عن العدد أ وجميع الأعداد الحقيقية الأصغر من أ.

اكتب كلًّا من الفترتين [٣، ∞[،]-∞، ٣] بطريقةِ الصِّفة المميزة، ثم مثلهما على خطِّ الأعداد.

الفترة]أ، ∞[

]أ، ∞[= {س : س > أ ، س ∈ ح}

وهى تعبِّر عن جمِيع الأعـداد الحقيقية الأكبر من أ

الفترة]-∞ ، أ[

]-∞ ، أ[= {س : س < أ ، س ∈ ح}

وهى تعبِّر عن جميع الأعـداد الحقيقية الأصغر من أ

اكتب الفترتين]٣، ∞[،]-∞، ٣[بطريقةِ الصفة المميزة، ثم مثلهما على خطِّ الأعداد.

لاحظ أن: مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة ح يمكن التعبيرُ عنها على صورة الفترة]-∞ ، ∞[

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة الموجبة $ح_+$ =]٠، ∞[

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة السالبة $ح_-$ =]-∞، ٠[

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة غير السالبة = [٠ ، ∞[

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة غير الموجبة =]-∞ ، ٠]

تدرب

١ اكتب على صورة فترة كلًّا من المجموعات الآتية، ومثِّلها على خطِّ الأعداد .

أ س = {س : س ⩾ ٢ ، س ∋ ح}

ب س = {س : س < ٣ ، س ∋ ح}

جـ س = {س : س > -٧ ، س ∋ ح}

د س = {س : س ⩽ $\sqrt[3]{-8}$ ، س ∋ ح}

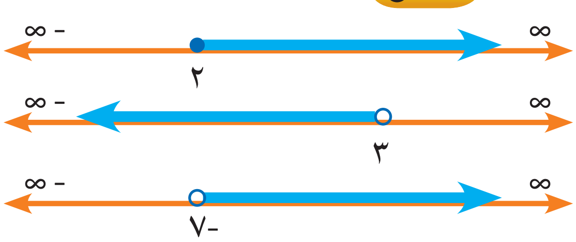
هـ مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من | -٣ |

الحل

أ س = [٢، ∞[

ب س =]-∞، ٣[

جـ س =]-٧، ∞[



أكمل الحل

٢ ضع الرمزَ المناسبَ ∋ أو ∌ أو ⊃ أو ⊅ لتكون العبارة صحيحة:

أ ٣ ....]-∞، ٤[ب [١ ، ٢] ....]-١، ∞[

جـ -٥ ....]-∞، -٦[د]٠ ، ٢[............ [٠، ∞[

هـ ٣ × ١٠^١٠ ....]٣، ∞[و [-٣، ١] .... [٢ ، ∞[

الحل

أ ∋ ب ⊃ جـ ∌ د ⊃ هـ ∋ و ⊅

العملياتُ على الفتراتِ

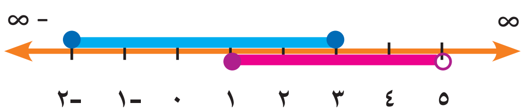
حيث إن الفترات هى مجموعاتٌ جزئيةٌ من مجموعةِ الأعداد الحقيقية ح، فإنه يمكن إجراءُ عمليات الاتحاد والتقاطع والفرق والمكملة على الفترات، ويمكَن الاستعانةُ بالتمثيلِ البيانىِّ للفترات على خطِّ الأعدادَ ؛ لتحديد وتوضيح ناتج العملية ويتضحُ ذلك من الأمثلة التالية:

أمثلة

١ إذا كانت س = [-٢، ٣] ، ص = [١، ٥[فأوجد مستعينًا بخطِّ الأعداد كلًّا من :

أ س ∩ ص   ب س ∪ ص

الحل



أ س ∩ ص = [-٢، ٣] ∩ [١، ٥[= [١، ٣]

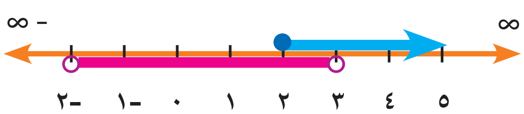
ب س ∪ ص = [-٢، ٣] ∪ [١، ٥[= [-٢، ٥[

٢ إذا كانت م = [٢، ∞[، ى =]-٢، ٣[فأوجد مستعينًا بخطِّ الأعداد كلًّا من :

أ م - ى   ب م ∩ ى   جـ م ∪ ى

د ى ∪ {٢، ٣}   هـ مَ   و ىَ

الحل



أ م - ى = [٢ ، ∞[-]-٢ ، ٣[= [٣ ، ∞[

ب م ∩ ى = [٢ ، ∞[∩]-٢ ، ٣[= [٢ ، ٣[

جـ م ∪ ى = [٢ ، ∞[∪]-٢ ، ٣[=]-٢ ، ∞[

د ى ∪ {٢ ، ٣} =]-٢، ٣[∪ {٢، ٣} =]-٢ ، ٣]

هـ مَ =]-∞، ٢[و ىَ =]-∞ ، -٢] ∪ [٣ ، ∞[

تدرب

ضَعْ علامة (✓) أمام العبارة الصَّحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ:

أ [-٢ ، ٥] - {٢ ، ٥} =]-٢ ، ٥[د [-١ ، ٣] ∩]١، ٤[=]١، ٣]

ب]-١ ، ٣] ∪ {-١ ، ٠} = [-١ ، ٠]   هـ [-٢ ، ٥[∪ {١ ، ٥} = [-٢، ٥]

جـ [٢ ، ٥] - {٥} = [٢ ، ٥[و [٥ ، ∞[-]-∞ ، ٥] =]٥، ∞[

الوحدة الأولى

الدرس السابع

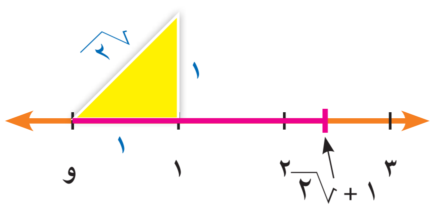
العمليات على الأعداد الحقيقية

فكر وناقش

أولاً: خواصُّ جمعِ الأعدادِ الحقيقيَّة

سبق أن حدَّدنا موضعَ النقطةَ س التى تمثل العدد ١ + √٢ على خطِّ الأعداد، وحيث إنه يمثلُ مجموعَ العددين الحقيقيين ١ ، √٢ فإن مجموعَ كلِّ عددينِ حقيقيين هو عددٌ حقيقى .

أى أن مجموعةَ الأعدادِ الحقيقية ح مغلقةٌ تحت عمليَّة الجمع .



الانغلاق إذا كانت أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن (أ + ب) ∈ ح

فمثلاً: كل من ٢ + ٣ ، ١ + √٢ ، -٢ + √٥ ، ٢ + ∛٣ عددٌ حقيقىٌّ .

الإبدال إذا كانت أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن أ + ب = ب + أ

فمثلاً: ٢ + √٣ = √٣ + ٢ ، ٣ - √٥ = -√٥ + ٣

الدمج إذا كانت أ ∈ ح ، ب ∈ ح ، جـ ∈ ح
فإن (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) = أ + ب + جـ

فمثلاً: (٣ + √٢) + ٥ = ٣ + (√٢ + ٥) **خاصية الدمج**

= ٣ + (٥ + √٢) **خاصية الإبدال**

= (٣ + ٥) + √٢ **خاصية الدمج**

= ٨ + √٢

سوف تتعلم

- العمليات على الأعداد الحقيقية .
- خواصُّ العملياتِ على الأعداد الحقيقية .

المصطلحات الأساسية

- الانغلاق .
- الإبدال .
- الدمج .
- المحايد الجمعى .
- المعكوس الجمعى .
- المحايد الضربى .
- المعكوس الضربى .
- توزيع الضرب على الجمع أو الطرح .

الصفر هو العنصرُ المحايدُ الجمعى

إذا كان أ ∈ ح فإن أ + ٠ = ٠ + أ = أ

فمثلاً: $\sqrt{٥} + ٠ = ٠ + \sqrt{٥} = \sqrt{٥}$ ، $-\sqrt[٣]{٤} + ٠ = ٠ + (-\sqrt[٣]{٤}) = -\sqrt[٣]{٤}$

وجود معكوس جمعى لكل عدد حقيقى

لكل أ ∈ ح يوجد (-أ) ∈ ح
حيث أ + (-أ) = (-أ) + أ = صفرًا

فمثلاً: $\sqrt{٣}$ ∈ ح ، معكوسه الجمعى $(-\sqrt{٣})$ ∈ ح حيث
$\sqrt{٣} + (-\sqrt{٣}) = (-\sqrt{٣}) + \sqrt{٣} =$ صفرًا.

تدرب

١ **أكمل** لتحصلَ على عبارةٍ صحيحةٍ:

- **أ** $\sqrt{٢} + ٥ = ٥ +$ ....
- **ب** $\sqrt{١١} + (-\sqrt{١١}) =$ ....
- **جـ** $٧ + \sqrt{٣} = ٥ +$ (............... + ...)
- **د** المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt[٣]{٨}$ هو ....
- **هـ** المعكوس الجمعى للعدد $(١ - \sqrt{٢})$ هو ....
- **و** $\sqrt{٣} + (-\sqrt{٣}) =$ ....
- **ز** $٧ + \sqrt{٥} - ٣ =$ ....
- **ح** $(٤ + \sqrt{٧}) + (٣ - \sqrt{٧}) =$ ....
- **ط** إذا كانت أ ∈ ح، ب ∈ ح فإن أ - ب تعنى ناتج جمع العدد أ و .... للعدد ب.
- **ى** إذا كانت أ ∈ ط، ب ∈ ن ، جـ ∈ ح فإن (أ + ب + جـ) ∈ ....

٢ **ناقِش مع معلمك / معلمتك و زملائك: موضحًا بأمثلة:**

- **أ** هل عمليَّةُ الطرح إبداليَّة فى ح؟
- **ب** هل عمليَّةُ الطرِح دامجةٌ فى ح؟

ثانيًا: خواصُّ ضربِ الأعدادِ الحقيقية:

الانغلاق إذا كانت أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن أ × ب ∈ ح

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة مغلقةٌ تحت عملية الضرب.

أى أن حاصل ضرب كل عددين حقيقيين هو عدد حقيقى.

مثلاً: ٥ × $\sqrt{٢}$ = ٥$\sqrt{٢}$ ∈ ح ، $\sqrt{٣}$ × $\sqrt{٣}$ = ٣ ∈ ح

-٢ × $\sqrt[٣]{٥}$ = -٢$\sqrt[٣]{٥}$ ∈ ح ، $\frac{٢}{٣}$ × π = $\frac{٢}{٣}\pi$ ∈ ح

٢$\sqrt{٣}$ × $\sqrt{٣}$ = ٦ ∈ ح ، ٢$\sqrt{٣}$ × ٥ = ١٠$\sqrt{٣}$ ∈ ح

الإبدال لكلِّ عددين حقيقيين أ ، ب يكون أ × ب = ب × أ

مثلاً: $\sqrt{٢}$ × ٣ = ٣ × $\sqrt{٢}$ = ٣$\sqrt{٢}$

الدمج لكلِّ ثلاثةِ أعدادٍ حقيقية أ ، ب ، جـ يكون

(أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ) = أ × ب × جـ

مثلاً: $\sqrt{٢}$ × (٥ × $\sqrt{٢}$) = ($\sqrt{٢}$ × ٥) × $\sqrt{٢}$ = (٥ × $\sqrt{٢}$) × $\sqrt{٢}$

= ٥ × $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ = ٥ × ٢ = ١٠

الواحد هو العنصرُ المحايدُ الضَّربى لكلِّ عددٍ حقيقيٍّ أ يكون أ × ١ = ١ × أ = أ

مثلاً: ٢$\sqrt{٥}$ × ١ = ١ × ٢$\sqrt{٥}$ = ٢$\sqrt{٥}$

وجود معكوسٍ ضربىٍّ لكلِّ عدد حقيقى ≠ ٠ لكل عدد حقيقى أ ≠ صفر

يوجد عدد حقيقى $\frac{١}{\text{أ}}$

حيث أ × $\frac{١}{\text{أ}}$ = $\frac{١}{\text{أ}}$ × أ = ١ (المحايد الضربى)

مثلاً: المعكوسُ الضربىُّ للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هو $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ حيث $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١

لاحظ أن: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = أ × $\frac{١}{\text{ب}}$ ، ب ≠ ٠

أى أن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = أ × المعكوس الضربى للعدد ب.

ناقش مع معلمك / معلمتك: هل عملية القسمة إبدالية فى ح؟ هل عملية القسمة دامجة فى ح؟

مثال

اكتب كلًّا من الأعدادِ $\frac{٦}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-٥}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١٥}{٢\sqrt{٥}}$ بحيث يكون المقامُ عددًا صحيحًا.

الحل

لاحظ أن المحايد الضربى ١ يمكن كتابته بالصورة $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ أو $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ أو $\frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$ أو …

$$\frac{٦}{\sqrt{٢}} = \frac{٦}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٦\sqrt{٢}}{٢} = \frac{٣\sqrt{٢}}{١} = ٣\sqrt{٢}$$

$$-\frac{٥}{\sqrt{٣}} = \frac{-٥}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = -\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$$

$$\frac{١٥}{٢\sqrt{٥}} = \frac{١٥}{٢\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{١٥\sqrt{٥}}{٢ \times ٥} = \frac{٣\sqrt{٥}}{٢}$$

تدرب

١ **أكمل** لتحصلَ على عبارةٍ صحيحة:

أ) $\sqrt{٢} + \sqrt{٢} + \sqrt{٢} = ... \times \sqrt{٢} = ...$

ب) $٣ \times \sqrt{٥} = \sqrt{٥} \times ....$

جـ) $\sqrt{٧} \times \sqrt{٧} = ...$

د) $٢\sqrt{٥} \times ٣\sqrt{٥} = ...$

هـ) المحايد الضربى فى ح هو العدد ....

و) المعكوس الضربى للعدد $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ هو ....

٢ **اكتب** كلًّا من الأعدادِ الآتية بحيث يكون المقامُ عددًا صحيحًا:

أ) $\frac{١٥}{\sqrt{٦}}$

ب) $\frac{٨}{٣\sqrt{٢}}$

جـ) $-\frac{٦}{\sqrt{٣}}$

د) $\frac{٢٥}{٢\sqrt{١٠}}$

توزيع الضرب على الجمع

لأى ثلاثة أعدادٍ حقيقية أ ، ب ، جـ يكون .

أ × (ب + جـ) = (أ × ب) + (أ × جـ) = أ ب + أ جـ

(أ + ب) × جـ = (أ × جـ) + (ب × جـ) = أ جـ + ب جـ

أمثلة

١ اختصر إلى أبسط صورة .

أ $٢\sqrt{٥}\,(٣ + \sqrt{٥})$ **ب** $(\sqrt{٢} + ٥)\,(٣ + \sqrt{٢})$

جـ $(٢ - ٣\sqrt{٥})^{٢}$

الحل

أ $٢\sqrt{٥}\,(٣ + \sqrt{٥}) = ٢\sqrt{٥} \times ٣ + ٢\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}$

$= ٢ \times ٣ \times \sqrt{٥} + ٢ \times ٥ = ٦\sqrt{٥} + ١٠$

ب $(\sqrt{٢} + ٥)\,(٣ + \sqrt{٢}) = \sqrt{٢}\,(٣ + \sqrt{٢}) + ٥\,(٣ + \sqrt{٢})$

$= \sqrt{٢} \times ٣ + \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} + ٥ \times ٣ + ٥ \times \sqrt{٢}$

$= ٣\sqrt{٢} + ٢ + ١٥ + ٥\sqrt{٢}$

$= ٣\sqrt{٢} + ١٧ + ٥\sqrt{٢} = ٨\sqrt{٢} + ١٧$

جـ $(٢ - ٣\sqrt{٥})^{٢} = (٢)^{٢} + ٢ \times ٢ \times -٣\sqrt{٥} + (-٣\sqrt{٥})^{٢}$

$= ٤ - ١٢\sqrt{٥} + ٩ \times ٥$

$= ٤٩ - ١٢\sqrt{٥}$

٢ أعط تقديرًا لناتج $(٣ + \sqrt{٥}) \times (١ + \sqrt{٨})$ و تحقَّق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

أولاً: تقدير $\sqrt{٥}$ هو ٢ $\therefore$ $(٣ + \sqrt{٥})$ تقديرها هو $٣ + ٢ = ٥$

تقدير $\sqrt{٨}$ هو ٣ $\therefore$ $(١ + \sqrt{٨})$ تقديرها هو $١ + ٣ = ٤$

$\therefore$ $(٣ + \sqrt{٥})(١ + \sqrt{٨})$ تقديرها هو $٥ \times ٤ = ٢٠$

ثانيًا: عند استخدامِ الآلة الحاسبة لحساب $(٣ + \sqrt{٥}) \times (١ + \sqrt{٨})$

نجد أن الناتج ٢٠,٠٤٥٩ أى أن التقدير مقبولٌ.

الوحدة الأولى

الدرس الثامن

العمليات على الجذور التربيعية

فكِّر وناقِش

سوف تتعلَّم

- إجراءُ العمليات على الجذور التربيعية .
- ضرب عددين مترافقين.

المصطلحات الأساسية

- جذر تربيعي .
- عدد ان مترافقان .

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين غير سالبين فإن :

أولاً: $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$

فمثلاً: $\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٢ \times ٣} = \sqrt{٦}$

$\sqrt{٢} \times \sqrt{١٠} = \sqrt{٢ \times ١٠} = \sqrt{٢٠}$

$\sqrt{١٥} \times \sqrt{٥} = \sqrt{١٥ \times ٥} = \sqrt{٧٥}$

$\sqrt{أ \times ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$

فمثلاً: $\sqrt{٢٠} = \sqrt{٤ \times ٥} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$

$\sqrt{٧٥} = \sqrt{٢٥ \times ٣} = \sqrt{٢٥} \times \sqrt{٣} = ٥\sqrt{٣}$

ثانيًا: $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$ حيث ب ≠ ٠

فمثلاً: $\sqrt{\frac{٥}{٩}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٩}} = \frac{١}{٣}\sqrt{٥}$

$\sqrt{\frac{١٦}{٣}} = \frac{\sqrt{١٦}}{\sqrt{٣}} = \frac{٤}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$

ثالثًا: $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} \times \frac{\sqrt{ب}}{\sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أب}}{ب}$ ب ≠ ٠

فمثلاً: $\frac{\sqrt{١٨}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{١٨}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣$

$\frac{\sqrt{٨٤}}{\sqrt{٧}} = \sqrt{\frac{٨٤}{٧}} = \sqrt{١٢} = \sqrt{٤ \times ٣} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

أمثلة

١ اختصر لأبسطِ صورةٍ $\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}}$

الحل

$$\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}} = \sqrt{١٦ \times ٢} - \sqrt{٣٦ \times ٢} + ٦ \times \frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٢}}$$

$$= \sqrt{١٦} \times \sqrt{٢} - \sqrt{٣٦} \times \sqrt{٢} + ٦ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$$

$$= ٤\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$$

٢ إذا كان س = $٢\sqrt{٥} - ١$ ، ص = $٢ + \sqrt{٥}$ أوجد قيمة المقدار س^٢ + ص^٢

الحل

$$س^٢ = (٢\sqrt{٥} - ١)^٢ = (٢\sqrt{٥})^٢ - ٤\sqrt{٥} + ١$$

$$= ٤ \times ٥ - ٤\sqrt{٥} + ١ = ٢١ - ٤\sqrt{٥}$$

$$ص^٢ = (٢ + \sqrt{٥})^٢ = ٤ + ٤\sqrt{٥} + ٥ = ٩ + ٤\sqrt{٥}$$

$$س^٢ + ص^٢ = ٢١ - ٤\sqrt{٥} + ٩ + ٤\sqrt{٥} = ٣٠$$

تدرب

١ ضع كلًّا ممايأتى على صورة أ$\sqrt{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة ممكنة :

أ $\sqrt{٢٨}$ ب $\sqrt{٧٥}$ ج $\sqrt{٥٤}$

د $\sqrt{١٠٠٠}$ هـ $٢\sqrt{٧٢}$ و $\frac{١}{٣}\sqrt{١٦٢}$

٢ اختصر إلى أبسط صورة:

أ $٢\sqrt{١٨} \times ٣\sqrt{٢}$ ب $\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{١٠}$ ج $٣\sqrt{٧} \times ٢\sqrt{٢٨}$

د $\sqrt{٥٠} + \sqrt{٨}$ هـ $\sqrt{٢٠} - \sqrt{٤٥}$ و $\sqrt{٢٧} + ٥\sqrt{١٨} - \sqrt{٣٠٠}$

٢ **أوجد** قيمةَ كل من س + ص ، س × ص فى الحالات الآتية:

أ س = ٣ + $\sqrt{٥}$ ، ص = ١ - $\sqrt{٥}$

ب س = $\sqrt{٣}$ - $\sqrt{٢}$ ، ص = $\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٢}$

جـ س = ٥ - ٣$\sqrt{٢}$ ، ص = ٥ - ٣$\sqrt{٢}$

العددان المترافقان

إذا كان أ ، ب عددين نسبيين موجبين

فإن كلًّا من العددين $\boxed{(\sqrt{أ} + \sqrt{ب}) ، (\sqrt{أ} - \sqrt{ب})}$ **هو مرافق للعدد الآخر .**

ويكون مجموعهما = $\boxed{٢\sqrt{أ}}$ = ضعف الحد الأول

وحاصل ضربهما = $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب}) \times (\sqrt{أ} - \sqrt{ب}) = (\sqrt{أ})^٢ - (\sqrt{ب})^٢ = \boxed{أ - ب}$

= مربع الحد الأول - مربع الحد الثانى

حاصلُ ضربِ العددين المترافقين هو دائمًا عددٌ نسبىٌّ

إذا كان لدينا عددٌ حقيقىٌّ مقامه على الصورة ($\sqrt{أ} \pm \sqrt{ب}$) فيجب وضعُه فى أبسط صورةٍ ، وذلك بضرب البسطِ والمقامِ فى مرافق المقام .

تدرَّب

أكمل

أ $\sqrt{٥}$ + $\sqrt{٢}$ مرافقه (..............) وحاصل ضربهما = ...

ب ٥ - $\sqrt{٣}$ مرافقه (..............) وحاصل ضربهما = ...

جـ ٢$\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٢}$ مرافقه (..............) وحاصل ضربهما = ...

أمثلة

١ **إذا كانت** $س = \frac{٨}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ ، $ص = \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ + \sqrt{٣}}$

اكتب كلًّا من س ، ص بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا ثم أوجد س + ص

الحل

$$س = \frac{٨}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}} = \frac{٨}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$$

$$= \frac{٨ \left(\sqrt{٥} + \sqrt{٣}\right)}{\left(\sqrt{٥}\right)^{٢} - \left(\sqrt{٣}\right)^{٢}} = \frac{٨ \left(\sqrt{٥} + \sqrt{٣}\right)}{٥ - ٣}$$

$$= ٤\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٣}$$

$$ص = \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ + \sqrt{٣}} = \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ + \sqrt{٣}} \times \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ - \sqrt{٣}}$$

$$= \frac{\left(٢ - \sqrt{٣}\right)^{٢}}{٤ - ٣} = \frac{٤ - ٤\sqrt{٣} + ٣}{١} = ٧ - ٤\sqrt{٣}$$

$$س + ص = ٤\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٣} + ٧ - ٤\sqrt{٣} = ٤\sqrt{٥} + ٧$$

٢ **إذا كانت** $س = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $ص = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$

أثبت أن **س ، ص عددان مترافقان، ثم أوجد قيمةَ كلٍّ من المقدارين**

$س^{٢} - ٢س ص + ص^{٢}$ ، $(س - ص)^{٢}$ ماذا تلاحظ؟

الحل

$$س = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}} = \frac{٤ \left(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}\right)}{٧ - ٣} = \sqrt{٧} + \sqrt{٣}$$

$ص = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$ $\therefore$ س ، ص عددان مترافقان

$$س^{٢} - ٢س ص + ص^{٢} = \left(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}\right)^{٢} - ٢\left(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}\right)\left(\sqrt{٧} - \sqrt{٣}\right) + \left(\sqrt{٧} - \sqrt{٣}\right)^{٢}$$

$$= \left(٧ + ٢\sqrt{٢١} + ٣\right) - ٢\left(٧ - ٣\right) + \left(٧ - ٢\sqrt{٢١} + ٣\right)$$

$$= ١٠ + ٢\sqrt{٢١} - ٨ + ١٠ - ٢\sqrt{٢١}$$

$$= ١٢$$

$$(س - ص)^{٢} = \left[\left(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}\right) - \left(\sqrt{٧} - \sqrt{٣}\right)\right]^{٢}$$

$\therefore \; (\text{س} - \text{ص})^{٢} = [\sqrt{٧} + \sqrt{٣} - \sqrt{٧} + \sqrt{٣}]^{٢} = (٢\sqrt{٣})^{٢}$

$= ٤ \times ٣ = ١٢$

ويلاحظ أن $\text{س}^{٢} - ٢\text{س ص} + \text{ص}^{٢} = (\text{س} - \text{ص})^{٢}$

٣ **في المثالِ السابقِ احسب كلًّا من**

أ $(\text{س} + \text{ص})$ ب $(\text{س} - \text{ص})$

جـ $(\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص})$ د $\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}$ **ماذا تلاحظ**

الحل

أ $\text{س} = \sqrt{٧} + \sqrt{٣}$ ، $\text{ص} = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$

فإن $\text{س} + \text{ص} = \sqrt{٧} + \sqrt{٣} + \sqrt{٧} - \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٧}$

ب $\text{س} - \text{ص} = \sqrt{٧} + \sqrt{٣} - (\sqrt{٧} - \sqrt{٣})$

$= \sqrt{٧} + \sqrt{٣} - \sqrt{٧} + \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

جـ $(\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص}) = ٢\sqrt{٧} \times ٢\sqrt{٣}$

$= ٤\sqrt{٢١}$

د $\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = (\sqrt{٧} + \sqrt{٣})^{٢} - (\sqrt{٧} - \sqrt{٣})^{٢}$

$= (٧ + ٢\sqrt{٢١} + ٣) - (٧ - ٢\sqrt{٢١} + ٣)$

$= ٧ + ٢\sqrt{٢١} + ٣ - ٧ + ٢\sqrt{٢١} - ٣$

$= ٤\sqrt{٢١}$

نلاحظ أن $(\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص}) = \text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}$

العمليات على الجذور التكعيبية

فكِّر وناقِش

سوف تتعلم

- العملياتُ على الجذور التكعيبية.

المصطلحات الأساسية

- الجذر التكعيبى.

لأى عددينِ حقيقيين أ ، ب:

١ $\sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{ب} = \sqrt[3]{أ \times ب}$

فمثلاً: $\sqrt[3]{٥} \times \sqrt[3]{٢} = \sqrt[3]{٥ \times ٢} = \sqrt[3]{١٠}$

$\sqrt[3]{٣} \times \sqrt[3]{-٤} = \sqrt[3]{٣ \times -٤} = \sqrt[3]{-١٢}$

لأى عددين حقيقيين أ ، ب:

٢ $\sqrt[3]{أ \times ب} = \sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{ب}$

فمثلاً: $\sqrt[3]{٤٠} = \sqrt[3]{٨ \times ٥} = \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{٥} = ٢\sqrt[3]{٥}$

$\sqrt[3]{-١٢٨} = \sqrt[3]{-٦٤ \times ٢} = \sqrt[3]{-٦٤} \times \sqrt[3]{٢} = -٤\sqrt[3]{٢}$

٣ $\frac{\sqrt[3]{أ}}{\sqrt[3]{ب}} = \sqrt[3]{\frac{أ}{ب}}$ حيث ب ≠ ٠، أ، ب ∈ ح

فمثلاً: $\frac{\sqrt[3]{١٢}}{\sqrt[3]{٣}} = \sqrt[3]{\frac{١٢}{٣}} = \sqrt[3]{٤}$

٤ $\sqrt[3]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[3]{أ}}{\sqrt[3]{ب}}$ حيث ب ≠ ٠، أ، ب ∈ ح

فمثلاً: $\sqrt[3]{\frac{٣}{٢}} = \frac{\sqrt[3]{٣}}{\sqrt[3]{٢}}$

فكّر إذا ضربنا كلًّا من البسط والمقام فى $\sqrt[3]{٤}$ ، فأوجد الناتجَ فى أبسط صورة.

أمثلة

١ اختصر لأبسطِ صورة:

أ $\sqrt[3]{54} + 8\sqrt[3]{\frac{-1}{4}} + 5\sqrt[3]{16}$ **ب** $\sqrt[3]{24} - 6\sqrt[3]{13\frac{8}{9}}$

الحل

أ $\sqrt[3]{54} + 8\sqrt[3]{\frac{-1}{4}} + 5\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{27 \times 2} + 8\sqrt[3]{\frac{-1}{4} \times \frac{2}{2}} + 5\sqrt[3]{8 \times 2}$

$= \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{2} + 8\frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{8}} + 5 \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2}$

$= 3\sqrt[3]{2} + \frac{8 \times -\sqrt[3]{2}}{2} + 5 \times 2 \times \sqrt[3]{2}$

$= 3\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} + 10\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$

ب $\sqrt[3]{24} - 6\sqrt[3]{13\frac{8}{9}} = \sqrt[3]{24} - 6\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \sqrt[3]{8 \times 3} - 6 \times \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}}$

$= \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} - 6 \times \frac{5}{2} = 2\sqrt[3]{3} - 15$

٢ إذا كانت $\text{س} = \sqrt[3]{3} + 1$، $\text{ص} = \sqrt[3]{3} - 1$

فأوجد قيمة كل من :

أ $(\text{س} + \text{ص})^3$ **ب** $(\text{س} - \text{ص})^3$

الحل

أ $(\text{س} + \text{ص})^3 = (\sqrt[3]{3} + 1 + \sqrt[3]{3} - 1)^3$

$= (2\sqrt[3]{3})^3 = 8 \times 3 = 24$

ب $(\text{س} - \text{ص})^3 = (\sqrt[3]{3} + 1 - \sqrt[3]{3} + 1)^3$

$= (2)^3 = 8$

الوحدة الأولى

الدرس العاشر

تطبيقات على الأعداد الحقيقية

فكر وناقش

سوف تتعلم

- حل تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية

المصطلحات الأساسية

- دائرة.
- متوازى المستطيلات.
- مكعب.
- أسطوانة دائرية قائمة.
- كرة.

الدائرة

محيط الدائرة = ٢ π نق وحدة طولية.

مساحة الدائرة = π نق^{٢} وحدة مربعة

حيث نق طول نصف قطر الدائرة، π (النسبة التقريبية)

أمثلة

١ **أوجد** محيط دائرة مساحتها ٣٨,٥ سم^{٢} $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

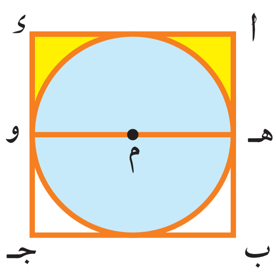
الحل

مساحة الدائرة = π نق^{٢}

$٣٨,٥ = \frac{٢٢}{٧}$ نق^{٢} $\therefore$ نق^{٢} $= \frac{٣٨,٥ \times ٧}{٢٢} = \frac{٤٩}{٤}$

$\therefore$ نق $= \sqrt{\frac{٤٩}{٤}} = \frac{٧}{٢} = ٣,٥$ سم

٢ فى الشكلِ المقابلِ الدائرة م مرسومة داخل المربع أ ب جـ ى، فإذا كانت مساحة الجزء الملون باللون الأصفر $\frac{٥}{٧}$ ١٠سم^{٢}
أوجد محيط هذا الجزء $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$



الحل

نفرض أن طولَ نصف قطر الدائرة = نق .

$\therefore$ طول ضلع المربع = ٢ نق

مساحة الجزء باللون الأصفر = مساحة المستطيل أ هـ و ى - مساحة نصف الدائرة

$١٠\frac{٥}{٧}$ = نق × ٢نق - $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق^{٢}

$\frac{٧٥}{٧}$ = ٢ نق^{٢} - $\frac{١١}{٧}$ نق^{٢} = $\frac{٣}{٧}$ نق^{٢}

∴ نق^{٢} = ٢٥ ∴ نق = ٥سم

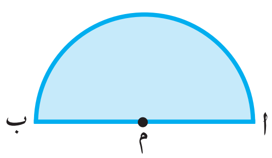
محيط الجزء باللون الأصفر = (أ هـ + أ ى + ى و) + $\frac{١}{٢}$ محيط الدائرة

= (٥ + ١٠ + ٥) + $\frac{١}{٢}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٥ = ٣٥$\frac{٥}{٧}$سم

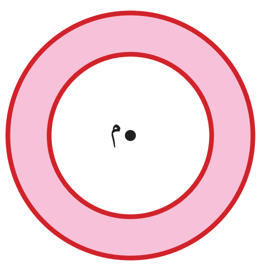
تدرب

١ دائرةٌ مساحتها ٦٤ π سم^{٢}. أوجد طولَ نصف قطرها ، ثم أوجد محيطها لأقرب عددٍ صحيحٍ (π = ٣,١٤).

٢ **فى الشكلِ المقابل:** $\overline{أ ب}$ قطر نصف الدائرة فإذا كانت مساحة هذه المنطقة ١٢,٣٢سم^{٢} أوجد محيط الشكل.



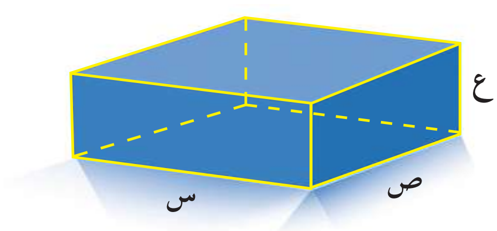
٣ **فى الشكلِ المقابل:** دائرتان متحدتان فى المركز م طول نصفى قطريهما ٣سم ، ٥سم.
أوجد مساحةَ الجزء الملون بدلالة π.



متوازى المستطيلات

هو مجسمٌ جميع أوجهه الستة مستطيلة الشكل، وكل وجهين متقابلين متطابقان

إذا كانت أطوال أحرفه س ، ص، ع فإن:



المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية = ٢ (س + ص) × ع وحدة مربعة

المساحةُ الكليةُ = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

المساحة الكلية = ٢ (س ص + ص ع + س ع) وحدة مربعة

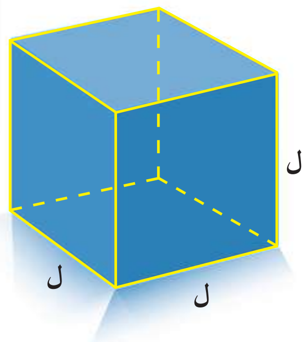
حجم متوازى المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم متوازى المستطيلات = س × ص × ع وحدة مكعبة

حالة خاصة: المكعب

هو متوازى مستطيلات أطوال أحرفه متساوية.

إذا كان طول حرفه = ل وحدة طول فإن



مساحة كل وجه = ل² وحدة مربعة

مساحته الجانبية = ٤ ل² وحدة مربعة

مساحته الكلية = ٦ل² وحدة مربعة

حجم المكعب = ل³ وحدة مكعبة

مثال

أوجد المساحةَ الكليةَ لمكعبٍ حجمه ١٢٥سم³

الحل

حجم المكعب = ل³ ∴ ١٢٥ = ل³ ∴ ل = ∛١٢٥ = ٥سم

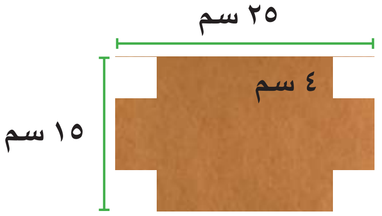
المساحة الكلية = ٦ل² = ٦ × (٥)² = ١٥٠سم²

تدرب

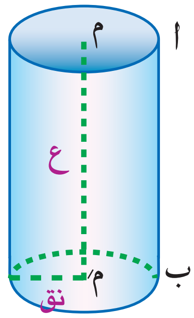
١ متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل فإذا كان حجمه ٧٢٠سم٣ وارتفاعه ٥سم **أوجد مساحته الكلية.**

٢ **أيهما أكبر حجمًا:** مكعب مساحته الكلية ٢٩٤سم² أم متوازى مستطيلات أبعاده ٧√٢ ، ٥√٢ ، ٥سم.

٣ قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل بعداها ٢٥، ١٥سم قطع من كل ركن من أركانها الأربعة مربع طول ضلعه ٤سم. ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضًا على شكل متوازى مستطيلات، أوجد حجمه ومساحته الكلية.



الأسطوانةُ الدائريَّةُ القائمةُ



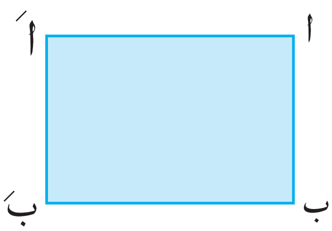
هى مجسمٌ له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان كل منهما عبارة عن سطح دائرةٍ، أما السطحُ الجانبىُّ فهو سطحٌ منحن يسمى سطح الأسطوانة.

- إذا كانت م، مَ مركزى قاعدتى الأسطوانة فإن م مَ هو ارتفاع الأسطوانة.

هيا نفكر إذا كانت أ ∋ الدائرة م، ب ∋ الدائرة مَ ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{م مَ}}$

- و قطعنا سطح الأسطوانة الجانبى عند $\overline{\text{أ ب}}$

وبسطنا هذا السطحَ فإننا نحصلُ على سطحِ المستطيل أ ب بَ أَ



ويكون أ ب = ارتفاع الأسطوانة ، أأَ = محيط قاعدة الأسطوانة.

مساحة المستطيل أ ب بَ أَ = المساحة الجانبيةُ للأسطوانة.

المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ π نق ع وحدة مربعة

المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين

= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢} وحدة مربعة

حجم الأسطوانة = مساحةُ القاعدةُ × الارتفاع = π نق^{٢} ع وحدة مربعة

مثال

قطعةٌ من الورقِ على شكلِ مستطيل أ ب جـ ء ، فيه أ ب = ١٠ سم، ب جـ = ٤٤ سم، طويت على شكل أسطوانةٍ دائرية قائمةٍ، بحيث ينطبقُ $\overline{\text{أ ب}}$ على $\overline{\text{ء جـ}}$ أوجد حجم الأسطوانة الناتجة ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$).

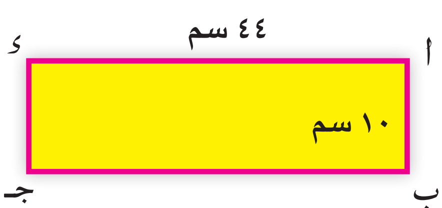
الحل

محيط قاعدة الأسطوانة = ٤٤ سم.

٢ π نق = ٤٤

٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق = ٤٤

∴ نق = ٧ سم



حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع

= $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)^{٢} × ١٠ = ١٥٤٠ سم^{٣}

تدرب

١ أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ، طول نصف قطر قاعدتها ١٤سم، وارتفاعها ٢٠سم. أوجد حجمَها ومساحتها الكلية.

٢ أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ حجمها ٧٥٣٦سم^{٣} ، وارتفاعها ٢٤سم أوجد مساحتها الكلية (π = ٣,١٤)

٣ أيهما أكبر حجمًا: أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ طول نصف قطر قاعدتها ٧سم وارتفاعها ١٠سم، أم مكعب طول حرفه ١١سم.

الكرة

هى مجسمٌ سطحه منحنى جميع نقاط سطحه على أبعاد متساوية (نق) من نقطة ثابتة داخله (مركز الكرة).

إذا قطعت الكرة بمستوى مار بمركزها فإن المقطع دَائرةٌ مركزها هو مركز الكرة ، وطول نصف قطرها هو طول نصف قطر الكرة نق.

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} وحدة مكعبة.

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} وحدة مربعة.

مثال

كرة حجمها ٥٦٢,٥ π سم^{٣} أوجد مساحة سطحها

الحل

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

٥٦٢,٥ π = $\frac{٤}{٣}$ × π نق^{٣}

∴ نق^{٣} = ٥٦٢,٥ × $\frac{٣}{٤}$ = ٤٢١,٨٧٥

نق = $\sqrt[٣]{٤٢١,٨٧٥}$ = ٧,٥سم

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} = ٤ × π (٧,٥)^{٢} = ٢٢٥π سم^{٢}

تدرب

أوجد الحجمَ ومساحةَ السطح لكرة طول قطرها ٤,٢ سم (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

الوحدة الأولى
الدرس الحادى عشر

حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

فكر وناقش

سوف تتعلم
- حل المعادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد.
- حل المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد.

المصطلحات الأساسية
- المعادلة.
- الدرجة المعادلة.
- المتباينة.
- الدرجة المتباينة.
- حل المعادلة.
- حل المتباينة.

أولاً:حل المعادلاتِ من الدرجة الأولى فى متغيرٍ واحد فى ح

نعلم أن المعادلة ٣ س - ٢ = ٤ **تسمى معادلة من الدرجة الأولى**

حيث أن س المتغير (المجهول)

ولحل هذه المعادلة فى ح

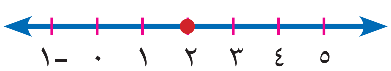
٣ س - ٢ = ٤   **بإضافة ٢ إلى طرفى المعادلة**

٣ س   = ٦   **ويمكن الضرب فى المعكوس الضربى لمعامل س**

$\frac{١}{٣} \times ٣س = \frac{١}{٣} \times ٦$

∴ س = ٢

أى أن مجموعة الحل = { ٢ }



و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل المقابل

أمثلة

١ **أوجد** فى ح مجموع حل المعادلة $\sqrt{٣}$ س - ١ = ٢ ومثل الحل على خط الأعداد.

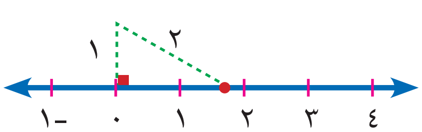
الحل

$\sqrt{٣}$ س - ١ = ٢   ∴ $\sqrt{٣}$ س = ٣

∴ س = $\frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ ∴ س = $\sqrt{٣}$ ∈ ح

مجموعة الحل هى {$\sqrt{٣}$ }

و يمثل الحلُّ على خطِّ الأعداد كما بالشكل المقابل.

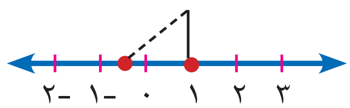


٢ **أوجد** فى ح مجموعةَ حلِّ المعادلة س + $\sqrt{٢}$ = ١ ، ومثل الحلَّ على خطِّ الأعداد.

الحل

س + $\sqrt{٢}$ = ١ ∴ س = ١ - $\sqrt{٢}$ ∈ ح

و يمثل الحلّ على خطِّ الأعداد كما بالشكل المقابل.



تدرب

١ **أوجد** فى ح مجموعة الحلِّ لكلٍّ من المعادلاتِ الآتيةِ ومثِّل الحلَّ على خطِّ الأعداد.

أ ٥س + ٦ = ١ ب ٢ س + ٤ = ٣ جـ ٢ س - ٣ = ٤

د س + ٥ = ٠ هـ $\sqrt{٢}$ س - ١ = ١ و س - ١ = $\sqrt{٥}$

ثانيًا: حل المتباينات من الدرجة الأولى فى متغيرٍ واحدٍ فى ح وتمثيل الحلّ على خطِّ الأعداد.

الخواصُّ التاليةُ تستخدم لحلِّ المتباينة فى ح وتكتب مجموعة الحل على صورة فترة:

إذا كانت أ ، ب، جـ أعدادًا حقيقيَّة وكان أ > ب فإن:

١ أ + جـ > ب + جـ. **خاصية الإضافة.**

٢ إذا كانت جـ > ٠ فإن أ × جـ > ب × جـ. **خاصية الضرب فى عددٍ حقيقيٍّ موجبٍ.**

٣ إذا كان جـ < ٠ فإن أ × جـ < ب × جـ. **خاصية الضرب فى عدد حقيقى سالب.**

أمثلة

١ **أوجد** مجموعة حل المتباينة ٢ س - ١ ≥ ٥ فى ح ومثل الحل بيانيًّا.

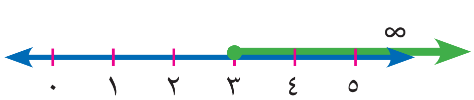
الحل

بإضافة ١ إلى طرفى المتباينة تصبح ٢ س ≥ ٦

بضرب طرفى المتباينة فى ($\frac{١}{٢}$ > ٠) س ≥ ٣

∴ مجموعة الحل فى ح هى [٣ ، ∞[

و يمثلها الشعاع باللون الأخضر على خط الأعداد.



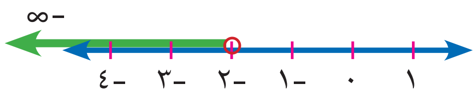
٢ **أوجد** في ح مجموعةَ حلِّ المتباينة ٥ - ٣ س < ١١، ومثِّل الحلَّ بيانيًّا.

الحل

بإضافة (-٥) إلى طرفى المتباينة فيكون -٣ س < ٦

بضرب طرفى المتباينة فى (- $\frac{١}{٣}$) ينتج أن:

∴ س > -٢



أى أن مجموعة الحل فى ح هى]-٢ ، ∞[

و يمثلها الجزء باللون الأخضر على خط الأعداد

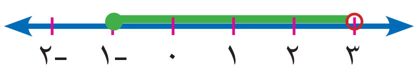
٣ **أوجد** فى ح مجموعة حل المتباينة -٣ ⩽ ٢س -١ < ٥ ومثل الحل بيانيًّا

الحل

بإضافة (١) إلى حدود المتباينة -٣ + ١ ⩽ ٢س -١ + ١ < ٥ + ١

أى -٢ ⩽ ٢ س < ٦، وبضرب حدود المتباينة فى ($\frac{١}{٢}$ > ٠)

-١ ⩽ س < ٣



∴ مجموعة الحل فى ح هى [-١، ٣[

و يمثلها على خطِّ الأعداد الجزءُ باللون الأخضر.

فى مثال ٣ ما مجموعةُ حلِّ المتباينة فى ط؟

ما مجموعةُ حلِّ المتباينة فى ص؟

٤ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة ٢س + ٣ ⩽ ٥س + ٣ < ٢س + ٩ ومثل الحل بيانيا :

الحل

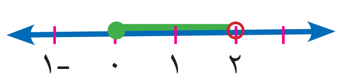
٢س+ ٣ ⩽ ٥س + ٣ <٢س +٩ بإضافة (-٢س)

٣ ⩽ ٣س + ٣ < ٩ بإضافة (-٣)

٠ ⩽ ٣س <٦ يضرب حدود المتباينة

٠ ⩽ س <٢

مجموعة الحل فى ح هى [٠ ، ٢[



الوحدة الثانية

٢

العلاقة بين متغيرين

الوحدة الثانية

الدرس الأول

العلاقةُ بين متغيِّرينِ

فكِّر وناقِش

سوف تتعلم

- العلاقةُ بين متغيرين من الدرجة الأولى.
- التمثيلُ البيانيُّ للعلاقة بين متغيرين من الدرجة الأولى.

مصطلحات أساسية

- متغير.
- علاقة.
- معادلة من الدرجة الأولى.

يمتلك شخصٌ أوراقًا مالية فئة ٥٠ جنيهًا، وأوراقًا مالية فئة ٢٠ جنيهًا، فإذا اشترى هذا الشخص جهازًا كهربائيًّا ثمنه ٣٩٠ جنيهًا.

فكر: كم عدد الأوراق من كل نوع التى يعطيها للبائع؟

نفرض أن س: عدد الأوراق فئة ٥٠ جنيهًا، فتكون قيمتها ٥٠س جنيهًا.

وأن ص: عدد الأوراق فئة ٢٠ جنيهًا، فتكون قيمتها ٢٠ص جنيهًا.

والمطلوب: معرفة س، ص التى تجعل: **٥٠س + ٢٠ص = ٣٩٠**

تسمى هذه العلاقةُ **معادلة من الدرجة الأولى**، فى متغيرين يمكن قسمةُ طرفى المعادلة على ١٠ فنحصل على معادلة مكافئة لها، وهى:

٥س + ٢ص = ٣٩

$$\text{وتكون ص} = \frac{\text{٣٩ - ٥س}}{\text{٢}}$$

لاحظ أن: كل من س، ص أعداد طبيعية، وفى هذه الحالة تكونَ س عددًا فرديًّا.

يمكن تكوينُ الجدولِ المقابل لمعرفة الإمكانات المختلفة وهى:

س	ص	(س،ص)
١	١٧	(١، ١٧)
٣	١٢	(٣، ١٢)
٥	٧	(٥، ٧)
٧	٢	(٧، ٢)
٩	سالبة	لاتصلح

يعطى البائع ورقة واحدة فئة ٥٠ جنيهًا، ١٧ ورقة فئة ٢٠ جنيهًا.

أو ٣ ورقات فئة ٥٠ جنيهًا ، ١٢ ورقة فئة ٢٠ جنيهًا.

أو ٥ ورقات فئة ٥٠ جنيهًا ، ٧ ورقات فئة ٢٠ جنيهًا .

أو ٧ ورقات فئة ٥٠ جنيهًا ، ورقتين فئة ٢٠ جنيهًا.

تدرب

١ مع شخص أوراقٌ ماليةٌ فئة ٥ جنيهات، وأوراقٌ ماليةٌ فئة ٢٠ جنيهًا. اشترى هذا الشخص من المركز التِّجارى بما قيمته ٧٥ جنيهًا، ما الإمكانات المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام نوعى الأوراق المالية التى معه؟

٢ مثلثٌ متساوى الساقين، محيطه ١٩سم، ما الإمكاناتُ المختلفةُ لأطوالِ أضلاعه، علمًا بأن أطوالَ أضلاعه $\in$ ص$_+$

لاحظ أن: مجموع طولى أى ضلعين فى المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

دراسةُ العلاقة بين متغيّرين

أ س + ب ص = جـ حيث أ ≠ ٠، ب ≠ ٠ تسمى **عَلاقة خطية** بين المتغيرين س، ص

و يمكن إيجادُ مجموعةٍ من الأزواج المرتبة (س، ص) تحقِّق هذه العلاقة.

مثلاً:

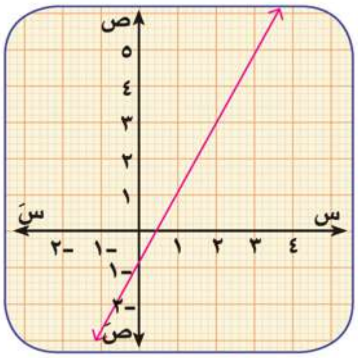
بدراسة العلاقة ٢س – ص = ١

عند س = ١	تكون ص = ١	∴ (١، ١)	تحقق العلاقة
عند س = ٠	تكون ص = -١	∴ (٠، -١)	تحقق العلاقة
عند س = ٣	تكون ص = ٥	∴ (٣، ٥)	تحقق العلاقة
عند س = -١	تكون ص = -٣	(-١، -٣)	تحقق العلاقة

وهكذا نجدُ أن هناك عددًا لانهائى من الأزواج المرتبة التى تحقِّق هذه العلاقة.

لاحظ أن:

- يمكن تمثيلُ العلاقة ٢س – ص = ١، بيانيًّا باستخدام بعض الأزواج المرتبة التى حصلنا عليها.
- كل نقطة $\in$ الخط المستقيم باللون الأحمر، يمثلها زوجٌ مرتبٌ يحقِّق العَلاقة ٢س – ص = ١.



تدرب

١ أوجد أربع أزواج مرتبة تحقق كلًّا من العَلاقات الآتية ، ومثلها بيانيًّا:

أ س + ص = ٣   ب س – ٢ص = ٥

جـ ص = ٢   د س = ١

٢ إذا كان (-٣، ٢) تحقق العلاقة ٣ س + ب ص =١، فأوجد قيمة ب.

٣ إذا كان (ك، ٢ك) تحقق العلاقة س + ص = ١٥ ، فأوجد قيمة ك.

التمثيلُ البيانيُّ للعلَاقةِ بين متغيرين

العلاقة **أ س + ب ص = جـ** حيث أ، ب كلاهما معًا ≠٠ تسمى علاقة بين المتغيرين س ، ص ويمثلها بيانيًّا خط مستقيم.

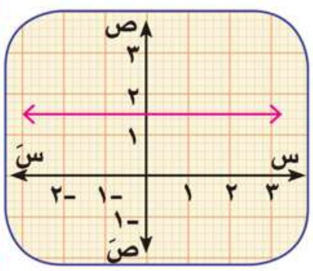
إذا كانت **أ = ٠**

يمثلها مستقيمٌ يوازى محور السينات.

مثلاً: العلاقة ٢ ص = ٣

أى: ص = $\frac{٣}{٢}$

يمثلها الخط المستقيم باللون الأحمر وهو يمر بالنقطة (٠، $\frac{٣}{٢}$) ويكون موازيًا لمحور السينات.



حالة خاصة:

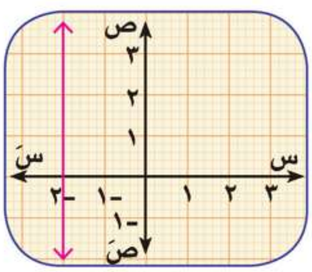
العَلاقة ص = ٠ يمثلها محور السينات.

إذا كانت **ب = ٠**

يمثلها مستقيمٌ يوازى محور الصادات.

مثلاً: العلاقة س = -٢

يمثلها الخط المستقيم باللون الأحمر وهو يمر بالنقطة (-٢، ٠) ويكون موازيًا لمحور الصادات.



حالة خاصة:

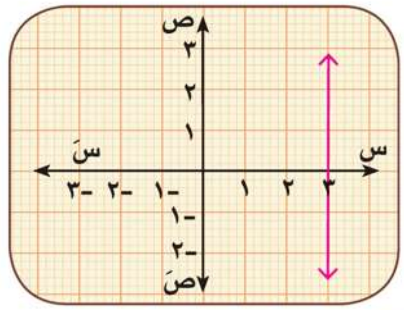
العلاقة س = ٠ يمثلها محور الصادات.

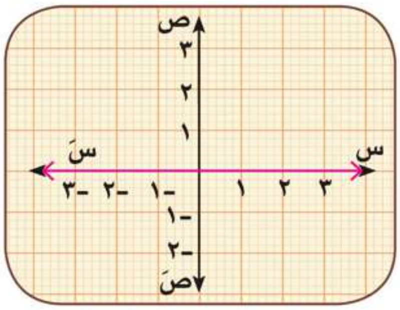
تدرب

١ مثل بيانيًّا كلًّا من العلاقات الآتية:

أ ٢س = ٥   ب ص + ١ = ٠

٢ أوجد العلاقةَ التى يمثلها الخطُّ المستقيمُ باللونِ الأحمرِ فى كلًّا من الشكلين التاليين:





مثال

مثل بيانيًّا العلاقة: س + ٢ ص = ٣

الحل

يمكن اختيارُ مجموعةٍ من الأزواج المرَّتبة التى تحقِّق هذه العلاقة:

مثلاً: بوضع ص = ٢ ∴ س = -١ (-١، ٢) يحقق العلاقة

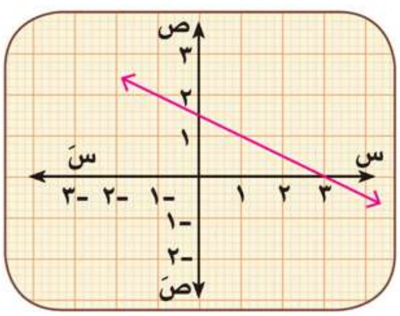
بوضع ص = ٠ ∴ س = ٣ (٣ ، ٠) يحقق العلاقة

بوضع ص = -١ ∴ س = ٥ (٥ ، -١) تحقق العلاقة وهكذا ..

ويمكن وضعُ هذه النتائج فى صورة جدولٍ كالتالى:

س	-١	٣	٥	٠
ص	٢	٠	-١	$\frac{٣}{٢}$

وتمثل هذه العلاقةُ الخطَّ المستقيمَ باللون الأحمر.



ناقش مع معلمك:

١ ماذا تلاحظُ على تغير قيمة ص كلما زادت قيمة س؟

٢ متى يمرُّ الخطُّ المستقيمُ الممثل للعلاقة أس + ب ص = جـ بنقطة الأصل؟

الوحدة الثانية

الدرس الثانى

ميل الخطِّ المستقيم وتطبيقاتٌ حياتية

فكّر وناقِش

سوف تتعلم

- ميل الخطِّ المستقيم.
- تطبيقاتٌ حياتيةٌ على ميل الخطِّ المستقيم.

مصطلحات أساسية

- ميل.
- ميل موجب.
- ميل سالب.
- الميل يساوى صفرًا.
- الميل غير معرف.

إذا لاحظنا تحرّك نَقطةٍ على خطٍّ مستقيمٍ من الموضع أ(س$_1$، ص$_1$) إلى الموضع ب (س$_2$، ص$_2$) حيث س$_2$ > س$_1$

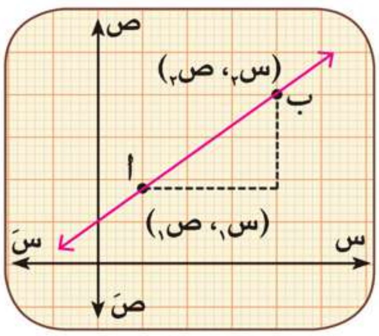
وكل من أ، ب ∈ المستقيم **فإن:**

التغيُّر فى الإحداثى السينى = س$_2$ − س$_1$

ويسمى بالتغير الأفقى

التغير فى الإحداثىِّ الصادىِّ = ص$_2$ − ص$_1$

ويسمى **بالتغير الرأسى** (من الممكن أن يكون موجبًا أو سالبًا أو يساوى الصفر).

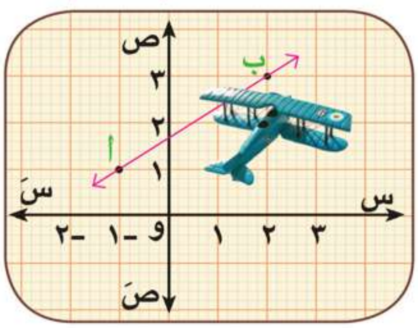


ميلُ الخطِّ المستقيم = $\frac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}}$ = $\frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$

م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ حيث س$_2$ > س$_1$

فى الأمثلةِ الآتية ستدرس الحالاتِ المختلفة للتغير الرأسى (ص$_2$ − ص$_1$):

مثال ١



إذا كانت: أ = (-١، ١)، ب = (٢، ٣).

فإن: ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٣ - ١}{٢ - (-١)}$ = $\frac{٢}{٣}$

تلاحظ أن:

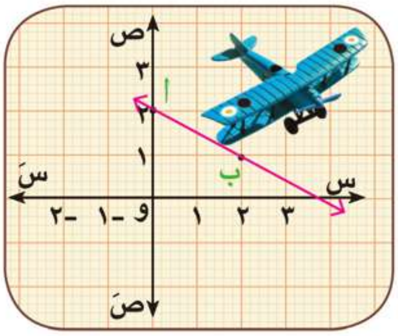
١ تحركت نقطة أ على الخطِّ المستقيمِ لأعلى لتصلَ إلى نقطة ب.

٢ $ص_٢ > ص_١$ ٣ الميل موجب.

مثال ٢

إذا كانت: أ (٠، ٢)، ب (٢، ١)

فإن: ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١ - ٢}{٢ - ٠} = - \frac{١}{٢}$



تلاحظ أن:

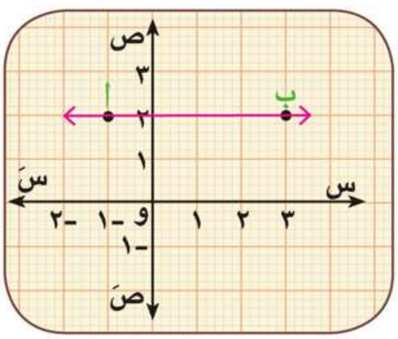
١ تحركت نقطةُ أ على المستقيمِ لأسفل لتصل إلى نقطة ب.

٢ $ص_٢ < ص_١$ ٣ الميل سالب.

مثال ٣

إذا كانت: أ (-١، ٢) ، ب (٣، ٢)

فإن: ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٢ - ٢}{٣ - (-١)} = \frac{صفر}{٤}$ = صفرً.



تلاحظ أن:

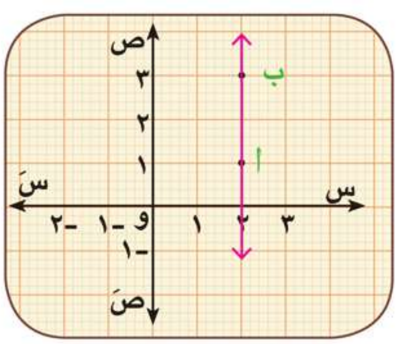
١ تحركت نقطة أ أفقيًّا لتصل إلى نقطة ب.

٢ $ص_٢ = ص_١$ ٣ الميل = صفر.

مثال ٤

إذا كانت: أ = (٢، ١)، ب(٢، ٣) فإننا لانستطيع حسابَ الميل؛ لأن تعريفَ الميلِ يشترطُ وجودَ تغيرٍ فى الإحداثىِّ السينىِّ.

أى: $س_٢ - س_١ \neq ٠$



وتلاحظ أن:

١ تحركت نقطةُ أ رأسيًّا لتصل إلى نقطة ب.

٢ $س_٢ = س_١$ ٣ الميل غير معرف.

تدرب

١ في كلٍّ من الحالاتِ التالية، أوجد ميلَ المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$.

أ أ (١، ٢)، ب (٥، ٠) ب أ (٢، -١)، ب (٤، -١)

جـ أ (-١ ، ٣)، ب (٢، ١) د أ (٣، -١)، ب (٣، ٢)

٢ إذا كانت أ (٢، -١)، ب (٣، ٢)، جـ (٤، ٥)، أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ، ومثل كلًّا منهما بيانيًّا ماذا تلاحظ؟

٣ **اخترِ الإجابةَ الصحيحةَ من بين القوسينِ أمامَ كلِّ عبارةٍ:**

أولاً: الجدولُ الآتى يبين علاقة س، ص، وهى:

(ص = س + ٤ أو ص = س + ١ أو ص = ٢س - ١ أو ص = ٣س -٢)

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٣	٥	٧	٩

ثانيًا: إذا كان (٢، -٥) يحقِّق العلاقة ٣س - ص + جـ = ٠ فإن جـ = ...

(١ أو -١ أو ١١ أو -١١)

ثالثًا: (٣، ٢) لايحقق العَلاقةَ .... (ص + س = ٥ أو ٣ص - س = ٣ أو ص + س = ٧ أو ص - س = ١)

رابعًا: تستهلك آلةٌ للريِّ ٢,٤٧ من اللتر من السولار؛ لتشغيلها ٣ ساعات، فإذا عملت الآلة ١٠ ساعات، فإنها تستهلك .... من اللتر من السولار. (٧,٢ أو ٨ أو ٨,٤ أو ٩,٦)

٤ **أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ (-١، ٣)، ب (٢، ٥) هل النقطة جـ (٨، ١) ∋ $\overleftrightarrow{أب}$**

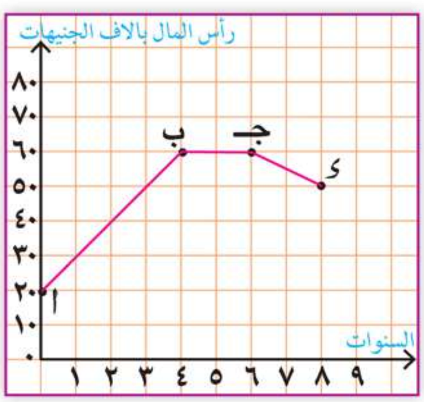
تطبيقاتٌ حياتيةٌ على ميلِ الخطِّ المستقيمِ

تطبيق (١)

الشكلُ المقابلُ: يوضِّح تغيرَ رأسِ مالِ شركةٍ خلال ٨ سنوات.

أ أوجد ميلَ كلٍّ من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$، $\overleftrightarrow{جـ ى}$ ما دلالةُ كلٍّ منها؟

ب احسب رأسَ مالِ الشركة عند بدءِ عملِها.



الحل

أ = (٠، ٢٠)، ب = (٤، ٦٠)، جـ = (٦، ٦٠)، ى = (٨، ٥٠)

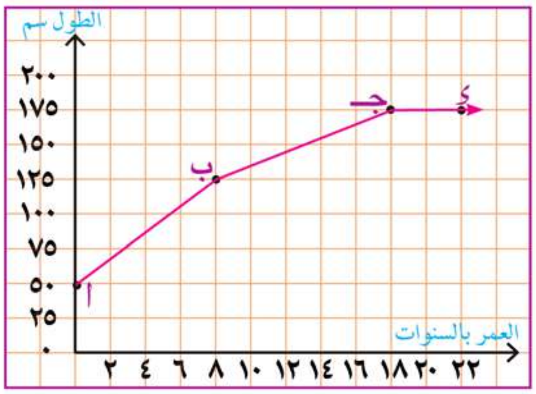
أولًا: ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{٦٠ - ٢٠}{٤ - ٠}$ = ١٠ وهو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة خلال السنوات الأربعة الأولى بمعدل ١٠ آلاف جنيه.

ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\frac{٦٠ - ٦٠}{٦ - ٤}$ = صفر وهو يعنى أن رأس مال الشركة كان ثابتًا خلال السنتين الخامسة والسادسة.

ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = $\frac{٥٠ - ٦٠}{٨ - ٦}$ = -٥ وهو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة خلال السنتين الأخيرتين بمعدل ٥ آلاف جنيه.

ثانيًا: رأسُ مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثى الصادى لنقطة أ = ٢٠ ألف جنيه.

تدرب

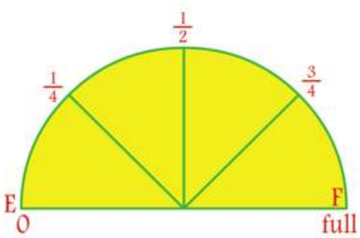


الشكلُ المقابلُ يوضِّحُ العلاقة بين طولِ شخصٍ (بالسنتيمتر) وعمره بالسنوات.

أولاً: أوجد ميلَ كلٍّ من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ وما دلالةُ كلٍّ منها؟

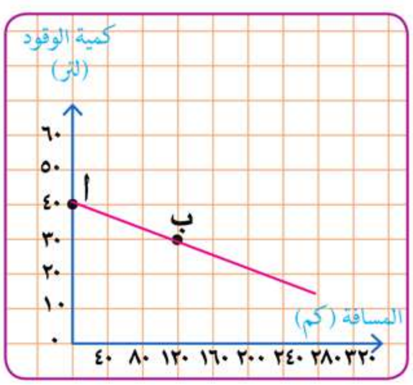
ثانيًا: احسب الفرقَ بين طولِ هذا الشخص عندما كان عمره ٨ سنوات، وطوله عندما كان عمره ٣٠ سنة.

تطبيق (٢)



ملأ حازم خزانَ سيارته بالوقود، وسعةُ هذا الخزان ٤٠ لترًا ، وبعد أن تحرك ١٢٠ كم ، وجد أن المؤشِّر يوضِّح أن المتبقى $\frac{٣}{٤}$ سعة الخزان، ارسم الشكلَ البيانىَّ الذى يوضِّح العَلاقة بين كميةِ الوقود بالخزان والمسافة التى قطعتها السيارة (علما بأن هذه العلاقة خطية)، واحسب المسافة التى تقطعُها السيارةُ حتى يفرغ الخزانُ.

الحل



عند البدء: أ (٠، ٤٠)

المسافة المقطوعة — كمية الوقود المستخدمة

بعد قطع ١٢٠ كم ب = (١٢٠، ٣٠)

ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{٣٠ - ٤٠}{١٢٠ - ٠}$ = $\frac{-١}{١٢}$

هذا الميلُ يعنى أن كميةَ الوقودِ بالخزان تنقصُ بمعدلِ لترٍ واحد كل ١٢ كم.

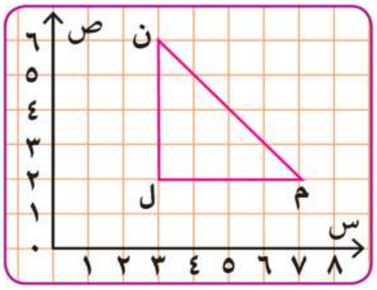
يفرغ الخزانُ عندما تقطعُ السيارةُ مسافةً = $\frac{\text{كمية الوقود}}{\text{معدل النقص}} = \frac{٤٠}{\frac{١}{١٢}}$

$= ٤٠ \times \frac{١٢}{١} = ٤٨٠$ كم.

لاحظ أن: $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ يقطع مُحورَ المسافة فى النقطة (٤٨٠، ٠) **وهى تعبِّر عن المطلوب.**

٥ فى الشكل المقابل:

ل م ن مثلثٌ قائم الزاوية فى ل ، ق (∠ م) = ٤٥° فإذا كان ل (٣، ٢)، م (٧، ٢) أوجد إحداثى ن واحسب ميل $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$.

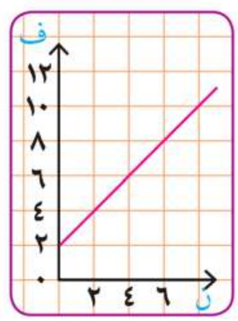


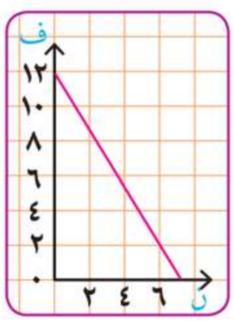
الحل

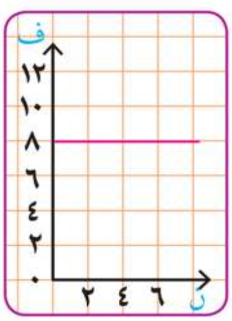
إحداثى ن = (٣ ، ٦)

ميل $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ = $\frac{٦ - ٢}{٣ - ٧}$ = $\frac{٤}{-٤}$ = -١

٦ كلٌّ من الأشكال التالية يوضِّحُ العلاقة بين المسافة ف (بالمتر) والزمن ن (بالثانية) لجسم. حدد موضعَ الجسمِ عند بدأ الحركة، وعند ن = ٦ ثوان ، وأوجد ميلَ المستقيم فى كلِّ حالةٍ (ماذا يمثل الميل؟).







ناقِشْ معلمك فى حل رقم ٦

الوحدة الثالثة

٣

الإحصاء

الوحدة الثالثة

الدرس الأول

جمع البيانات وتنظيمها

فكِّر وناقِش

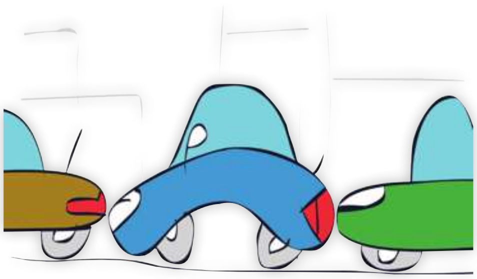
سوف تتعلم

- كيفية جمع البيانات وتنظيمها فى جداول تكرارية ذات مجموعات.

المصطلحات الأساسية

- جمع البيانات.
- تنظيم البيانات.
- جدول تكرارى ذو مجموعات.

إذا بحثت ظاهرةَ التكدُّس المرورى وطرق علاجه:



- ما مصادرُك للحصول على البيانات؟
- كيف يمكنك جمعُ البياناتِ حول هذه الظاهرة؟
- ما الطرقُ الإحصائيةُ التى سوف تستخدمها لتحليلِ البيانات؟
- هل تستطيعُ تفسير النتائج التى توصلت إليها؟
- ما مقترحاتُك لعلاج هذه الظاهرة وتحقيق السيولة المروريَّة؟

جمع البيانات

عمل تعاونى **تعاون مع زملائك فى جمع البيانات من مصادرها بتوزيع الأدوار:**

أ **المجموعة الأولى:** اجمع بيانات ابتدائية عن الظاهرة محلَّ الدراسة عن طريق استبيان تدور أسئلته حول (وسيلة المواصلات المستخدمة فى التنقل - حالة الطرق - زمن التكدس المرورى - وجود إشارات استرشادية على الطرق - التواجد الأمنى).

ب **المجموعة الثانية:** اجمع بيانات ثانوية عن الظاهرة محلَّ الدراسة من النشرات المرورية - الإنترنت - مصادر الإعلام.

جـ **المجموعة الثالثة:** لاحظ أى الطرق أكثر ازدحامًا، وسلوك قائدى السيارات والتزامهم بقوانين المرور، ومدى التزام المشاة بآداب الطريق، وعبور الطرق من المناطق المعدة لعبور المشاة.

تنظيمُ وتحليل البيانات

تعاون مع زملائك فى إعداد جدولٍ تكرارىٍّ لوسيلة المواصلات التى يستخدمها زملاؤك.

وسيلة المواصلات	مترو	حافلة	سيارة خاصة	تاكسى	دراجة	سيرًا على الأقدام	المجموع
التكرار	....	....	....	....	....	....	....

حدِّد الوسيلة الأكثر استخدامًا (المنوال)

١ هل هذه الوسيلةُ مناسبةٌ؟ هل تساعدُ فى علاج ظاهرةِ التكدُّس المرورى؟ لماذا؟

٢ ما مقترحاتُك لعلاج هذه الظاهرة فى ضوء ماتوصلت إليه من نتائج؟

تنظيمُ البيانات وعرضها فى جداول تكراريَّة

مثال

فيمايلى بيان بالدرجات التى حصل عليها ٣٠ طالبًا فى إحدى الاختبارات

٧	١٠	٧	٤	٥	٨	٦	٧	١٣	١٢
٢	٩	١١	١٢	١١	٩	١٥	١٢	١٣	٩
٥	١٤	١٩	٣	٩	١٤	٣	١٣	٨	١٧

المطلوب: تكوينُ الجدول التكرارى ذى المجموعات لهذه البيانات .

الحل

لتكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات نتبع الخطوات التالية:

أولاً: نوجد أكبر قيمة لهذه البيانات و أصغر قيمة لها؟

باعتبار مجموعة البيانات السابقة هى سـ

فإن: سـ = {س : ٢ ⩽ س ⩽ ١٩}

أى أن: قيم سـ تبدأمن ٢ وتنتهى عند ١٩

أى أن: المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة = ١٩ − ٢ = ١٧

ثانيًا: تجزَّأ المجموعة سـ إلى عدد من المجموعات الجزئية و المتساوية المدى وليكن ٦ مجموعات.

∴ مدى المجموعة = $\frac{١٧}{٦}$ تقترب من ٣

ثالثًا: تصبح المجموعاتُ الجزئية كالتالى.

المجموعة الأولى	٢ −
المجموعة الثانية	٥ −
المجموعة الثالثة	٨ −
المجموعة الرابعة	١١ −

وهكذا

لاحظ أن ٢ - معناها مجموعة البيانات الأكبر من أو تساوى ٢ والأقل من ٥ وهكذا.

رابعًا: تسجل البيانات فى الجدول التالى:

المجموعة	العلامات	التكرار
٢ -	////	٤
٥ -	~~////~~ /	٦
٨ -	~~////~~ //	٧
١١ -	~~////~~ ///	٨
١٤ -	///	٣
١٧ -	//	٢
المجموع		٣٠

خامسًا: يحذف عمود العلامات من الجدول فنحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات، ويمكن كتابته رأسيًّا أو أفقيًّا والصورة الأفقية للجدول هى كالآتى:

المجموعة	٢ -	٥ -	٨ -	١١ -	١٤ -	١٧ -	المجموع
التكرار	٤	٦	٧	٨	٣	٢	٣٠

الوحدة الثالثة

الدرس الثانى

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع النازل وتمثيلهما بيانيًّا

فكِّر وناقِش

سوف تتعلم

- كيفية تكوين كلٍّ من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والنازل.
- التمثيل البيانى لكلٍّ من الجدول التكرارىِّ المتجمع الصاعد والنازل.

المصطلحات الأساسية

- توزيع تكرارى.
- جدول تكرارى.
- جدول تكرارى متجمع صاعد.
- جدول تكرارى متجمع نازل.
- منحنى تكرارى متجمع صاعد.
- منحنى تكرارى متجمع نازل.

أولاً: الجدولُ التَّكرارىُّ المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيّا

مثال

يبين الجدول الآتى التوزيعَ التكرارىَّ لأطوال ١٠٠ تلميذ بالسنتيمترات فى إحدى المدارس:

(مجموعات) الطول بالسنتيمتر	١١٥-	١٢٠-	١٢٥-	١٣٠-	١٣٥-	١٤٠-	١٤٥-	المجموع
عدد التلاميذ (التكرار)	٨	١٢	١٩	٢٣	١٨	١٣	٧	١٠٠

١ ما عددُ التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١١٥ سم؟

٢ ما عددُ التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٣٥ سم؟

٣ ما عددُ التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٤٥ سم؟

كوِّن الجدولَ التكرارىَّ المتجمعَ الصاعد لهذه البيانات ومثله بيانيًّا

الحل

هل يوجد تلاميذ تقل أطوالهم عن ١١٥ سم؟ **لا**

هل يوجد تلاميذ تقل أطوالهم عن ١٣٥ سم؟ وما عددهم؟ **نعم ، ٦٢ تلميذًا.**

كيف توجد عدد التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٤٥ سم؟ **نجمع عدد التلاميذ فى مجموعات الطول الأقل من المجموعة ١٤٥**

و الآن للإجابة عن التساؤلات السابقة بطريقةٍ أكثر سهولة نكون الجدولَ التكرارىَّ المتجمِعَ الصاعدَ ، وذلك كالتالى:

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١١٥	٠
أقل من ١٢٠	٠ + ٨ = ٨
أقل من ١٢٥	٨ + ١٢ = ٢٠
أقل من ١٣٠	٢٠ + ١٩ = ٣٩
أقل من ١٣٥	٣٩ + ٢٣ = ٦٢
أقل من ١٤٠	٦٢ + ١٨ = ٨٠
أقل من ١٤٥	٨٠ + ١٣ = ٩٣
أقل من ١٥٠	٩٣ + ٧ = ١٠٠

أى

جدول التكرار المتجمع الصاعد

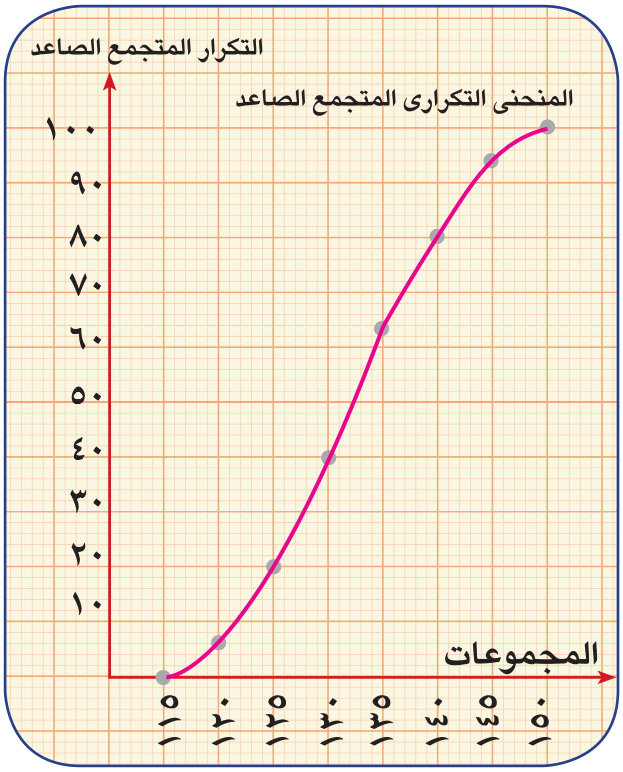
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١١٥	صفر
أقل من ١٢٠	٨
أقل من ١٢٥	٢٠
أقل من ١٣٠	٣٩
أقل من ١٣٥	٦٢
أقل من ١٤٠	٨٠
أقل من ١٤٥	٩٣
أقل من ١٥٠	١٠٠

ولتمثيل الجداولِ التكراريِّ المتجمِع الصّاعد بيانيًّا:

١ نخصص المحور الأفقىَّ للمجموعاتِ والمحورَ الرأسىَّ للتَّكرار المتجمع الصاعد.

٢ نختار مقياسًا للرسم على المحور الرأسى بحيث يتسع المحورُ للتكرارِ الكلى المتجمع الصاعد عدد عناصر المجموعة.

٣ نمثل التكرارَ المتجمعَ الصاعد لكل مجموعة ونرسم الخط البيانى لها بالتتابع.



ثانيًا الجدولُ التكراريُّ المتجمعُ النازل وتمثيله بيانيًا :

من التوزيع التكرارى السابق ، والذى يبين أطوال ١٠٠ طالب بالسنتيمترات فى إحدى المدارس.

أوجد: عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٥٠سم فأكثر.
عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٤٠سم فأكثر.
عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٢٥سم فأكثر.

كوِّن الجدول التكرارى المتجمع النازل، ثم مثله بيانيًّا.

الحل

لايوجد تلاميذ أطوالهم ١٥٠سم فأكثر.
عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٤٠سم فأكثر هو ٧ + ١٣ = ٢٠ طالبًا
عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٢٥سم فأكثر هو

أكمل: ١٩ + ... + ... + ... + ... = ...

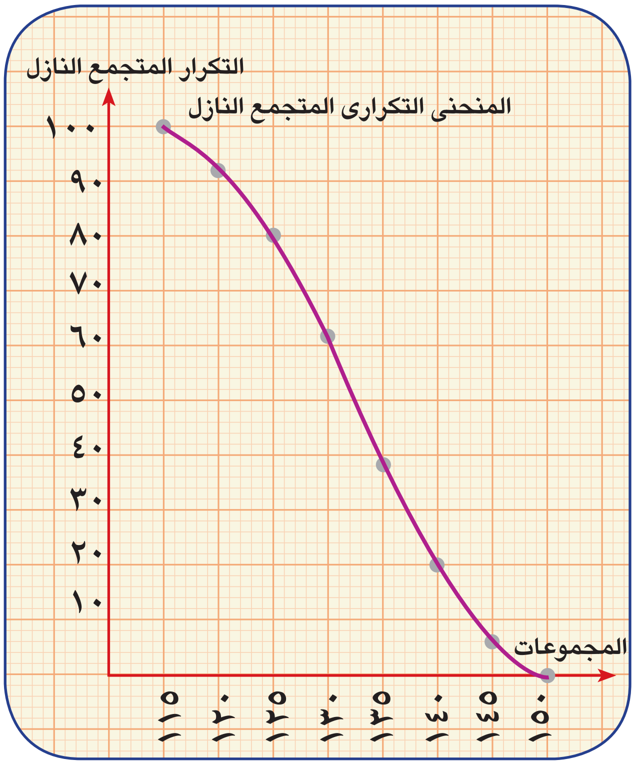
للإجابة عن هذه التساؤلات بصورة أكثر سهولة نكون الجدول التكرارى المتجمع النازل كالآتى:

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١١٥ فأكثر	٩٢ + ٨ = ١٠٠
١٢٠ فأكثر	٨٠ + ١٢ = ٩٢
١٢٥ فأكثر	٦١ + ١٩ = ٨٠
١٣٠ فأكثر	٣٨ + ٢٣ = ٦١
١٣٥ فأكثر	٢٠ + ١٨ = ٣٨
١٤٠ فأكثر	٧ + ١٣ = ٢٠
١٤٥ فأكثر	٠ + ٧ = ٧
١٥٠ فأكثر	٠

جدول التكرار المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
١١٥ فأكثر	١٠٠
١٢٠ فأكثر	٩٢
١٢٥ فأكثر	٨٠
١٣٠ فأكثر	٦١
١٣٥ فأكثر	٣٨
١٤٠ فأكثر	٢٠
١٤٥ فأكثر	٧
١٥٠ فأكثر	صفر

ولتمثيل هذا الجدول بيانيًّا نتبع نفس خطوات تمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ، وذلك لنحصل على التمثيل البيانى التالى:



تدرب

الجدول الآتى يمثل التوزيع التكرارى لأعمار ٥٠ عاملا بأحد المطابع :

المجموعات	٢٠ -	٢٥ -	٣٠ -	٣٥ -	٤٠ -	٤٥ -	٥٠ -
التكرار	٦	٧	١٠	....	٩	٣	٥

المطلوب:

أ أكمل الجدول.

ب ارسم فى شكل واحد المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والمنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع.

جـ من الرسم أوجد :

أولا : عدد العمال الذين أعمارهم أكبر من ٣٥ سنة.

ثانيا : عدد العمال الذين أعمارهم أصغر من ٤٥ سنة.

ناقِشْ معلمك فى الحل

الوحدة الثالثة

الدرس الثالث

الوسط الحسابى - الوسيط - المنوال

فكر وناقش

أولاً: الوسطُ الحسابىُّ

سبق أن درستَ كيفية إيجاد الوسط الحسابى لمجموعة من القيم وعلمت أن:

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$$

فمثلاً: إذا كان أعمار ٥ تلاميذ هى ١٣، ١٥، ١٦، ١٤، ١٧ سنة فإن:

الوسط الحسابى لأعمارهم = $\frac{١٣+١٥+١٦+١٤+١٧}{٥}$

= $\frac{٧٥}{٥}$ = ١٥ سنة

لاحظ أن: ١٥ × ٥ = ١٣ + ١٥ + ١٦ + ١٤ + ١٧

الوسطُ الحسابىُ: هو أبسطُ المتوسطات جميعًا ، وأكثرها تداولًا ، وهو القيمة التى لو أعطيت لكلِّ مفردة من مفردات المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس مجموع القيم الأصلية، ويمكن حسابه بجمع قيم المفردات كلها ثم نقسم على عدد المفردات.

إيجادُ الوسط الحسابى لبيانات من جداول تكرارية ذات مجموعات:

كيف يمكن إيجاد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعات	١٠ -	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ -	المجموع
التكرار	١٠	٢٠	٢٥	٣٠	١٥	١٠٠

لاحظ: لإيجاد الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات نتبع الخطوات التالية:

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد الوسط الحسابى من جدولٍ تكراريٍّ ذى مجموعات
- كيفية حساب الوسيط من جدولٍ تكرارى ذى مجموعات.
- كيفية حساب المنوال من جدولٍ تكرارى ذى مجموعات.

المصطلحات الأساسية

- وسط حسابى.
- وسيط.
- مدرج تكرارى.
- منوال .

١ نحدِّد مراكزَ المجموعات:

مركز المجموعة الأولى = $\frac{١٠+٢٠}{٢}$ = ١٥ . مركز المجموعة الثانية = $\frac{٢٠+٣٠}{٢}$ = ٢٥ ... وهكذا

ونظرًا لأن مدى المجموعات الجزئية متساو، وكل منها = ١٠

نعتبر الحدَّ الأعلى للمجموعة الأخيرة = ٦٠ فيكون:

مركزها = $\frac{٥٠ + ٦٠}{٢}$ = ٥٥

٢ نكون الجدولَ الرأسى الآتى:

المجموعة	مركز المجموعة م	التكرار ك	مركزالمجموعة × التكرار م × ك
١٠ -	١٥	١٠	١٥٠
٢٠ -	٢٥	٢٠	٥٠٠
٣٠ -	٣٥	٢٥	٨٧٥
٤٠ -	٤٥	٣٠	١٣٥٠
٥٠ -	٥٥	١٥	٨٢٥
المجموع		١٠٠	٣٧٠٠

٣ الوسطُ الحسابىُّ = $\frac{\text{مجموع (ك × م)}}{\text{مجموع ك}}$

= $\frac{٣٧٠٠}{١٠٠}$ = ٣٧

تدرب

١ إذا كان الوسطُ الحسابىُّ لدرجات تلميذ فى الخمسة أشهر الأولى هى ٢٣,٨ فما الدرجة التى يجب أن يحصل عليها فى الشهر السادس ليكون الوسط الحسابى لدرجاته ٢٤ درجة؟

٢ **فيما يلى التوزيع التكرارى لأوزان ٣٠ طفلًا بالكيلوجرامات.**

الوزن بالكيلو جرام	٦ -	١٠ -	١٤ -	١٨ -	٢٢ -	٢٦ -	٣٠ -	المجموع
التكرار	٢	٣	....	٨	٦	٤	٢	٣٠

أكمل الجدول ثم أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

ثانيًا: الوسيط

هو القيمةُ التى تتوسط مجموعةَ المفردات بعد ترتيبها تصاعديًا أو تنازليًا بحيث يكون عددُ القيم الأصغر منها مساويًّا لعددِ القيم الأكبر منها.

إيجادُ الوسيط لتوزيعٍ تكرارىٍّ ذى المجموعات بيانيّا:

١ ننشأ الجدولَ التكرارىَّ المتجمعَ الصاعدَ أو النازل ، ثم نرسُم المنحنى التَّكرارى المتجمع له.

٢ **نحدِّد ترتيب الوسيط** = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$.

٣ نحدِّد النقطة أ على المحور الرأسى (التكرار) والتى تمثِّل ترتيب الوسيط.

٤ نرسمُ مستقيمًا أفقيًا من نقطة أ فيقطع المنحنى فى نقطة نرسم منها عمودًا على المحور الأفقى ؛ ليقطعه فى نقطة تمثل الوسيط.

مثال ١

التوزيعُ التكرارىُّ الآتى يبين درجات ٦٠ طالبًا فى أحد الاختبارات

المجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦	المجموع
التكرار	٦	٩	١٢	١٥	١٠	٥	٣	٦٠

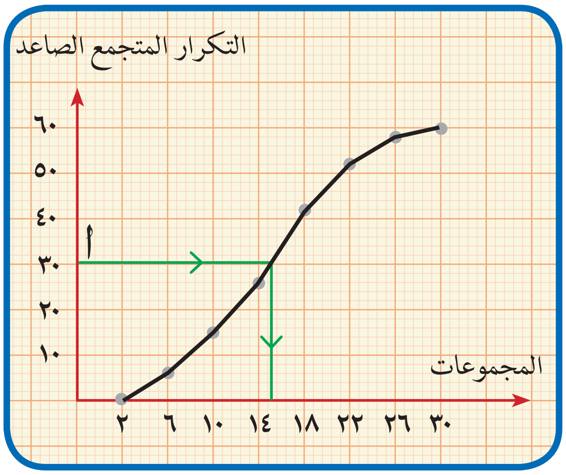
أوجد الوسيطَ لهذا التوزيع مستخدمًا جدول التَّكرار المتجمع الصّاعد.

الحل

١ ننشئ الجدولَ التكرارىَّ المتجمعَ الصاعد. ٢ نوجد ترتيب الوسيط = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠

٣ نرسم المنحنى التَّكرارى المتجمعَ الصاعد ومن الرسم نوجد الوسيط.

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢	صفر
أقل من ٦	٦
أقل من ١٠	١٥
أقل من ١٤	٢٧
أقل من ١٨	٤٢
أقل من ٢٢	٥٢
أقل من ٢٦	٥٧
أقل من ٣٠	٦٠



من الرسم الوسيط = ١٤,٨ من الدرجة

فكّر هل يمكنك إيجادُ الوسيط باستخدام الجدول التكرارى المتجمع النازل؟
هل تختلف قيمة الوسيط فى هذه الحالة.

مثال ٢

التوزيعُ التكرارى الآتى يبين الأجر اليومى لعدد ١٠٠ عامل فى أحد المصانع.

الأجر بالجنيه (المجموعات)	١٥ -	٢٠ -	٢٥ -	٣٠ -	٣٥ -	٤٠ -	المجموع
عدد العمال (التكرار)	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨	١٠٠

المطلوب:

١ رسم المنحنيين المتجمع الصاعد والنازل لهذا التوزيع معًا.

٢ هل يمكن إيجادُ الأجر الوسيط من هذا المنحنى؟

الحل

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع
أقل من ١٥	صفر
أقل من ٢٠	١٠
أقل من ٢٥	٢٥
أقل من ٣٠	٤٧
أقل من ٣٥	٧٢
أقل من ٤٠	٩٢
أقل من ٤٥	١٠٠

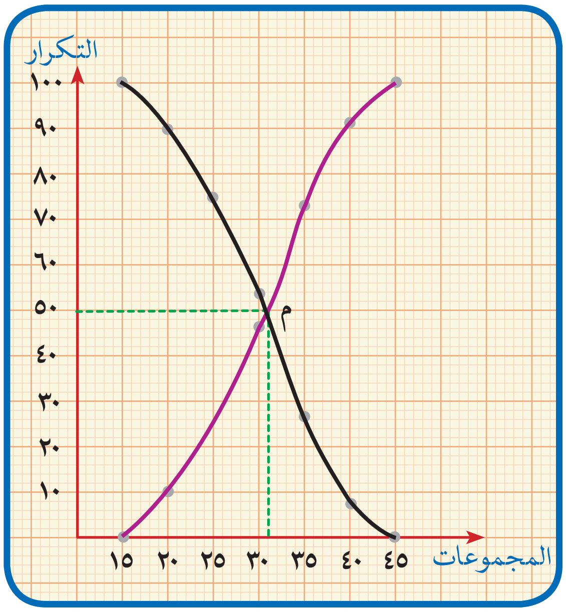
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع
١٥ فأكثر	١٠٠
٢٠ فأكثر	٩٠
٢٥ فأكثر	٧٥
٣٠ فأكثر	٥٣
٣٥ فأكثر	٢٨
٤٠ فأكثر	٨
٤٥ فأكثر	صفر

لاحظ أن:
المنحنى التكرارى المتجمعُ الصاعُد يتقاطعُ مع المنحنى التَّكرارى المتجمع النازل فى نقطة واحدة هى نقطة م .

الإحداثى الرأسى لنقطة م = ٥٠

$= \frac{١٠٠}{٢}$

= ترتيب الوسيط



∴ **الإحداثىُّ الأفقىُّ لنقطةٍ م يعين الوسيط**

كل ١٠مم من المحور الأفقى تمثل ٥ جنيهات

أكمل ٢ مم تمثل ....

الأجر الوسيط = ٣٠ + $\frac{٢ \times ٥}{١٠}$ = ٣١ جنيهًا.

تدرب

ارسم **منحنى التَّكرار المتجمع النازل للتوزيع التكرارى التالى ثم أوجد قيمة الوسيط.**

المجموعات	٥ -	١٠ -	١٥ -	٢٠ -	٢٥ -	٣٠ -	المجموع
التكرار	٤	٦	١٠	١٧	١٠	٣	٥٠

ثالثًا: المنوال

هو القيمةُ الأكثرُ شيوعًا فى مجموعة المفردات أى القيمة التى تتكرَّر أكثر من غيرها من القيم.

مثال

الجدولُ الآتى يبين التَّوزيعَ التكرارىَّ لدرجات ٤٠ تلميذًا فى أحد الاختبارات.

المجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-
التكرار	٣	٥	٨	١٠	٧	٥	٢

أوجد المنوالَ لهذا التَّوزيع بيانيًّا.

الحل

يمكن إيجادُ المنوال لهذا التوزيع بيانيًّا باستخدام المدرجِ التكرارىِّ ، وذلك كالآتى:

أولاً: ارسم المدرج التكرارىَّ

١ نرسم محورين متعامدين أحدهما أفقيًّا لتمثيل المجموعات، والآخر رأسيًّا لتمثيل تكرارِ كلِّ مجموعة.

٢ نقسم المحورَ الأفقىَّ إلى عددٍ من الأقسام المتساويةِ بمقياس رسمٍ مناسبٍ لتمثيلِ المجموعات.

٣ نقسم المحورَ الرأسىَّ إلى عددٍ من الأقسامِ المتساوية بمقياسِ رسمٍ مناسبٍ بحيث يمكن تمثيلُ أكبر تكرارٍ فى المجموعات.

٤ نرسم مستطيلًا قاعدته هى المجموعة (٢-) وارتفاعه يساوى التكرار (٣).

٥ نرسم مستطيلاً ثانيًا ملاصقًا للمستطيل الأول قاعدته هى المجموعة (٦-) وارتفاعه يساوى التكرار (٥).

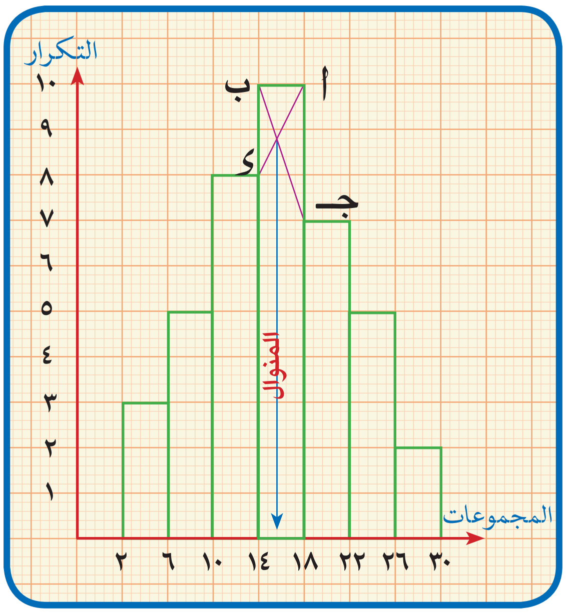
٦ نكرِّر رسم باقى المستطيلات المتلاصقة حتى آخر مجموعة (٢٦-).

ثانيًا: إيجاد المنوال من المدرج التكرارى:

لإيجاد المنوال من المدرج التَّكرارى نلاحظُ أن المجموعة الأكثر تكرارًا هى المجموعة (١٤ -) وتسمى **المجموعة المنوالية**. لماذا؟

نحدِّد نقطة تقاطع $\overline{أ ى}$ ، $\overline{ب جـ}$ من الرسم، ونسقط منها عمودًا على المحور الأفقى يحدد القيمة المنوالية للتوزيع.

من الرسم ما القيمةُ المنوالية؟

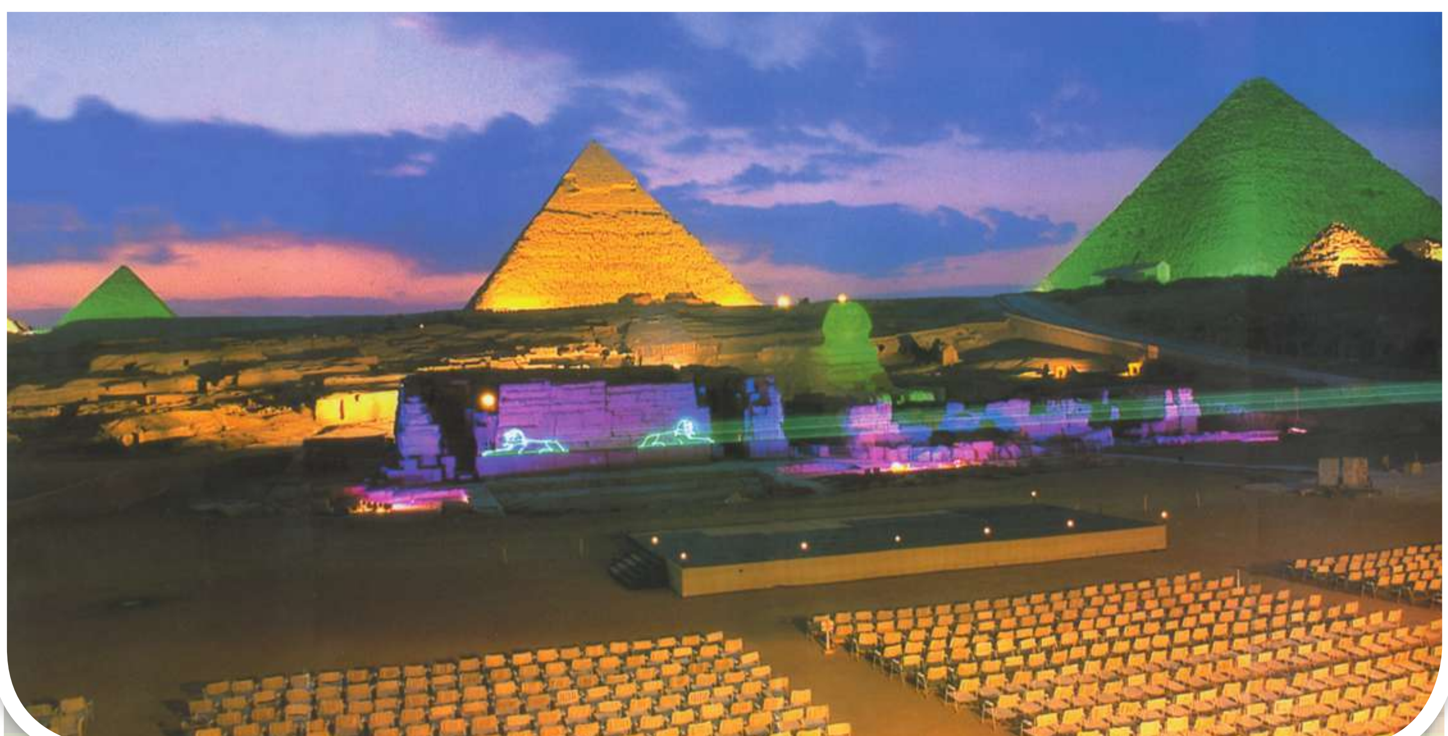


ناقِشْ معلمك فى الحل

الوحدة الرابعة

٤

متوسطات المثلث
والمثلث المتساوي الساقيين



متوسطات المثلث

فكِّر وناقِش

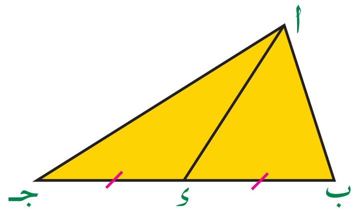
سوف تتعلَّم

- متوسطات المثلث
- المثلث الثلاثيني الستيني.

المصطلحات الأساسية

- متوسط للمثلث.
- مثلث ثلاثيني ستيني

متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلث الى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.

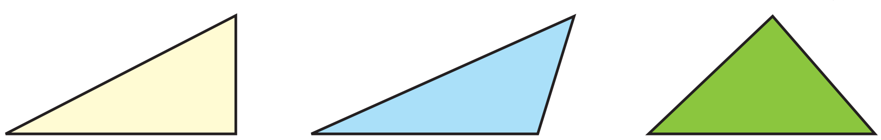


فى △ أ ب جـ: ∵ ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

فيكون $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط للمثلث

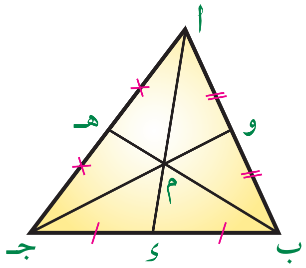
- ماعدد متوسطات أى مثلث؟

- ارسم المتوسطات فى كل من المثلثات التالية:



نظرية (١)

متوسطات المثلث تتقاطع جميعًا فى نقطة واحدة

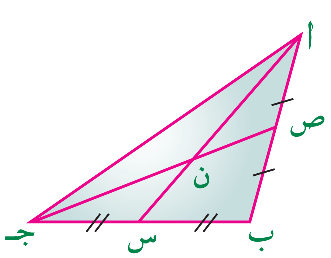


فى △ أ ب جـ: إذا كانت ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$،

هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$، و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$.

فإن: $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$، $\overline{\text{جـ و}}$ تتقاطع فى نقطة واحدة.

تدرب



فى الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث فيه س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

ص منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ س}}$ ∩ $\overline{\text{جـ ص}}$ = {ن}.

١ ارسم $\overleftarrow{\text{ب ن}}$ ليقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى ع,
أوجد بالقياس طول $\overline{\text{أ ع}}$ ، طول $\overline{\text{جـ ع}}$.
هل أ ع = جـ ع؟ فسر إجابتك؟

٢ قس الأطوال ثم أكمل:

$\frac{\text{ن س}}{\text{ن أ}} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$ ، $\frac{\text{ن ص}}{\text{ن جـ}} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$ ، $\frac{\text{ن ع}}{\text{ن ب}} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$

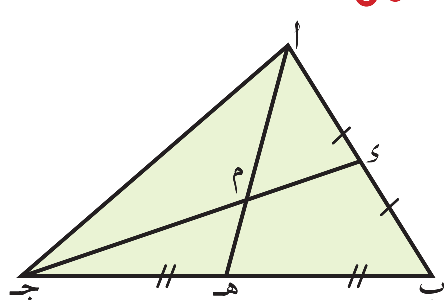
إذا كانت قياساتك دقيقة فإن $\frac{\text{ن س}}{\text{ن أ}} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ن ص}}{\text{ن جـ}} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ن ع}}{\text{ن ب}} = \frac{١}{٢}$

نظرية (٢)
نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة أو بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

تدرب

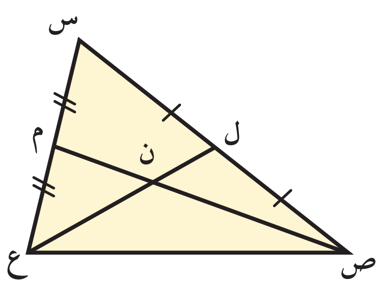
أكمل

١



م هـ = ٣سم ، م جـ = ٨سم
م أ = ... ، م ء = ...
م هـ = ... أ هـ ، م جـ = ... جـ ء

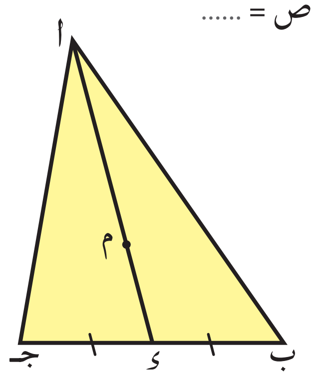
٢

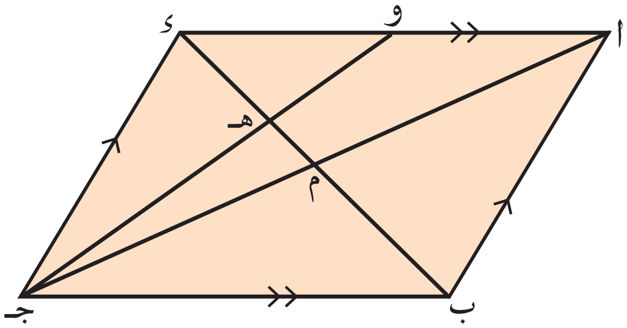


ل ع = ١٥سم ، ص م = ١٨سم ، س ص = ٢٠ سم
ن ل = ... ، ن ص = ...
محيط △ ن ل ص = ...

حقيقة

$\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى △ أ ب جـ، م ∈ $\overline{\text{أ ء}}$.
إذا كان: أ م = ٢ م ء
فإن: م تكون نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ .





مثال (١)

فى الشكل المقابل:

أ ب جـ ى متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م،

هـ ∈ $\overline{\text{ى م}}$ حيث ى هـ = ٢ هـ م،

رسم $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ فقطع $\overline{\text{أ ى}}$ فى و.

أثبت أن: أ و = و ى

البرهان: فى ▱ أ ب جـ ى

∵ $\overline{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب ى}}$ = {م} ∴ م منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

فى △ ى أ جـ

∵ م منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ $\overline{\text{ى م}}$ متوسط للمثلث

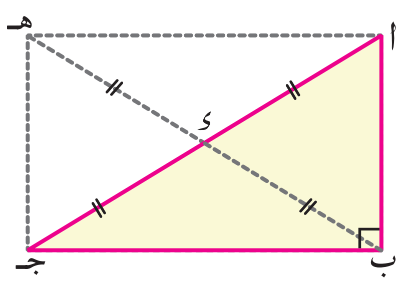
∵ هـ ∈ $\overline{\text{ى م}}$ ، ى هـ = ٢ هـ م

∴ هـ نقطة تقاطع متوسطات المثلث

∵ هـ ∈ $\overline{\text{جـ و}}$ ∴ $\overline{\text{جـ و}}$ متوسط للمثلث ، و منتصف $\overline{\text{أ ى}}$

نظرية (٣)

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث



المعطيات: أ ب جـ مثلث فيه ق (∠ ب) = ٩٠°

$\overline{\text{ب ى}}$ متوسط فى △ أ ب جـ

المطلوب: إثبات أن: ب ى = $\frac{1}{2}$ أ جـ

العمل: نرسم $\overleftarrow{\text{ب ى}}$ ونأخذ نقطة هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب ى}}$ بحيث ب ى = ى هـ

البرهان:

∵ الشكل أ ب جـ هـ فيه $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل أ ب جـ هـ متوازى أضلاع

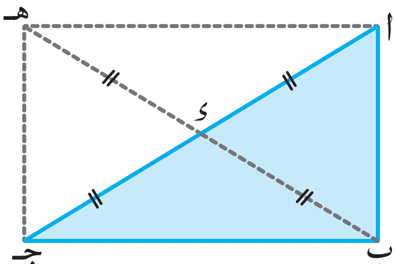
∵ ق (∠ ب) = ٩٠° ∴ الشكل أ ب جـ هـ مستطيل

∴ ب هـ = أ جـ

∵ ب ى = $\frac{1}{2}$ ب هـ   ∴ ب ى = $\frac{1}{2}$ أ جـ   **وهو المطلوب**

عكس نظرية ٣

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



المعطيات: أ ب جـ مثلث، $\overline{\text{ب ى}}$ متوسط ، ى أ = ى ب = ى جـ

المطلوب: إثبات أن ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°

العمل: نرسم $\overleftarrow{\text{ب ى}}$ ونأخذ نقطة هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب ى}}$ بحيث ب ى = ى هـ

البرهان:

∵ ب ى = $\frac{1}{2}$ ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ

∴ ب هـ = أ جـ

∵ الشكل أ ب جـ هـ فيه $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ متساويان فى الطول و ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل أ ب جـ هـ مستطيل

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°   **وهو المطلوب**

نتيجة

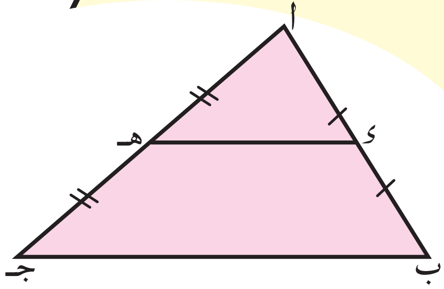
طول الضلع المقابل لزاوية قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر

تذكر أن

فى المثلث أ ب جـ إذا كانت ى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ فإن

١ ى هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

٢ $\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$



المثلث المتساوى الساقين

فكِّر وناقِش

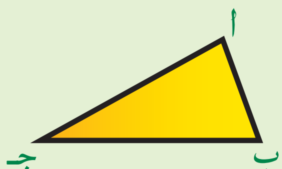
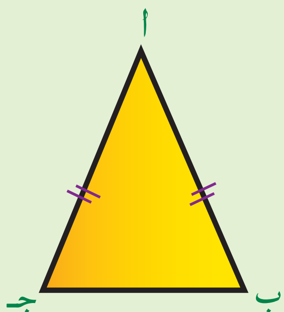
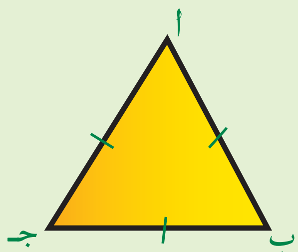
سوف تتعلم

- خواصُّ المثلثِ المتساوى الساقين.
- تصنيفاتُ المثلث المتساوى الساقين.

المصطلحات الأساسية

- مثلث متساوى الساقين.
- مثلث متساوى الأضلاع.
- مثلث مختلف الأضلاع.

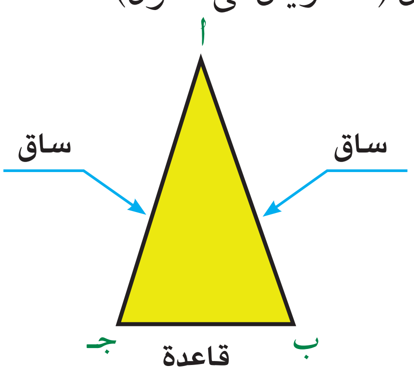
علمت أن المثلثاتِ تصنَّف حسب أطوالِ أضلاعها إلى ثلاثة أنواع:

مثلث مختلف الأضلاع	مثلث متساوى الساقين (متطابق الضلعين)	مثلث متساوى الأضلاع (متطابق الأضلاع)
 أ ب ≠ ب جـ أ ب ≠ أ جـ ب جـ ≠ أ جـ	 أ ب = أ جـ	 أ ب = أ جـ = ب جـ

فى الشَّكل المقابل:

لاحظ أن: الضلعين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ متطابقان (متساويان فى الطول).

لذلك يسمى المثلث أ ب جـ بالمثلث المتساوى الساقين وتسمى النقطة أ رأس المثلث، $\overline{\text{ب جـ}}$ قاعدته والزاويتان ب، جـ زاويتا قاعدة المثلث



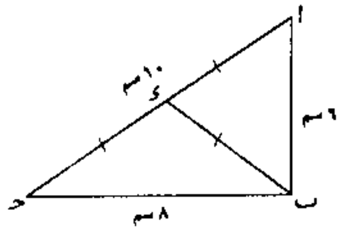
خواصُّ المثلَّثِ المتساوى الساقين

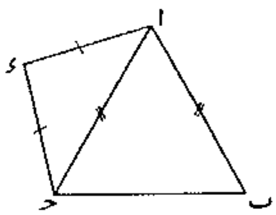
فى أىِّ مثلثٍ متساوى الساقين:

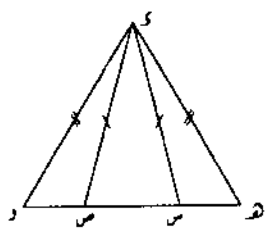
- مانوع كل من زاويتى القاعدة؟ (حادة - قائمة - منفرجة)
- مانوع زاوية الرأس؟

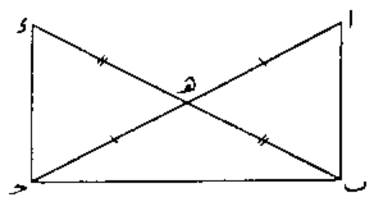
مثال

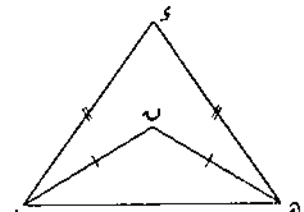
فى كل من الأشكال الآتية اذكر المثلثات المتساوية الساقين وحدد قاعدتها ثم لاحظ نوع زاويتى القاعدة وزاوية رأس المثلث .

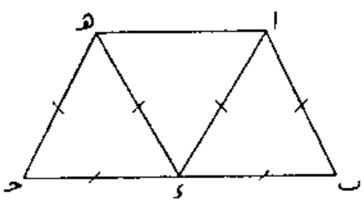

(شكل ١)

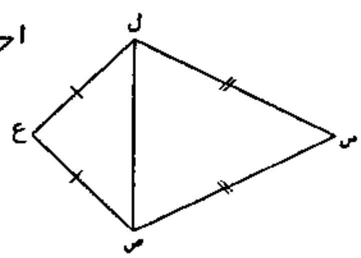

(شكل ٢)

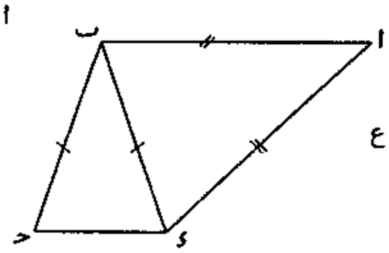

(شكل ٣)

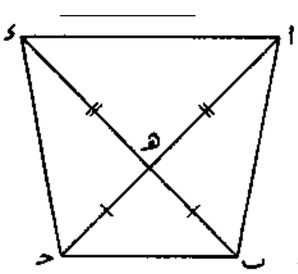

(شكل ٤)


(شكل ٥)


(شكل ٦)


(شكل ٧)


(شكل ٨)


(شكل ٩)

ناقِشْ مع معلمك فى الحل

الوحدة الرابعة

الدرس الثالث

نظريات المثلَّثِ المتساوى السّاقين

فكِّر وناقِش

سوف تتعلَّم

- العَلاقة بين زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين.
- العلاقة بين قياسات زاويا المثلَّث المتساوى الأضلاع.
- العَلاقة بين الضِّلعين المقابلين لزاويتين متساويتين فى مثلث.
- إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الأضلاع.

المصطلحات الأساسية

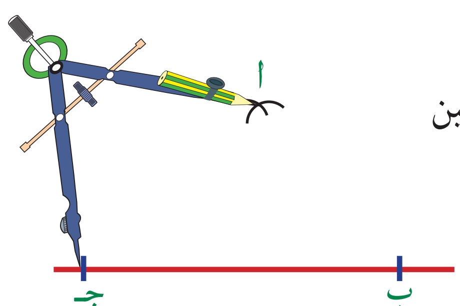
- مثلث متساوى الساقين.
- زاويتا القاعدة.

هل توجد عَلاقةٌ بين قياسِ زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين؟

للتعرُّف على ذلك قم بالنشاط التالى:

نشاط

باستخدام الفرجار



١ ارسم عدة مثلثاتٍ متساوية الساقين كما يوضِّح ذلك الرسم المقابل حيث أ ب = أ جـ .

٢ **أوجد** باستخدام المنقلة قياس كل من زاويتى القاعدة ∠ أ ب جـ، ∠ أ جـ ب .

٣ سجِّل البيانات التى حصلت عليها فى جدول كالآتى، وقارن بين القياسات فى كلِّ حالة.

رقم المثلث	ق (∠ أ ب جـ)	ق (∠ أ جـ ب)
١		
٢		
٣		

٤ احفظ نشاطَك فى ملف الإنجاز

نظرية (١)

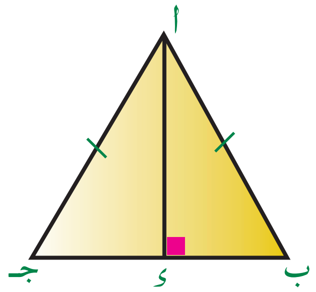
زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان

المعطيات : أ ب جـ مثلث فيه $\overline{\text{أ ب}} \equiv \overline{\text{أ جـ}}$

المطلوب : إثبات ان ∠ ب ≡ ∠ جـ

العمل : نرسم أ ى ⊥ ب جـ

البرهان : المثلثان أ ى ب، أ ى جـ قائما الزاوية فيهما

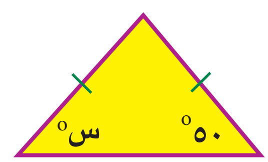


أ ب ≡ أ جـ	**(معطى)**
أ ى	**(ضلع مشترك)**
∴ △ أ ى ب ≡ △ أ ى جـ	**(وتر و ضلع)**
وينتج من التَّطابق أن ∠ ب ≡ ∠ جـ	**وهو المطلوب**

تدرب

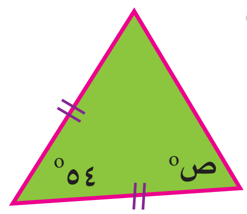
١ فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية أوجد قيمَة الرمز المستخدم فى قياس الزاوية:

أ



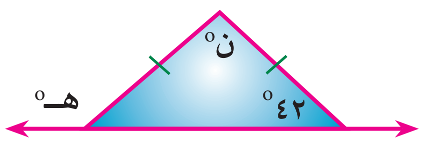
س = ...

ب



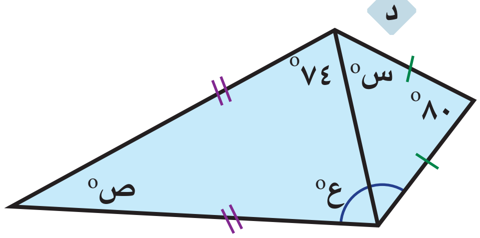
ص = ...

جـ



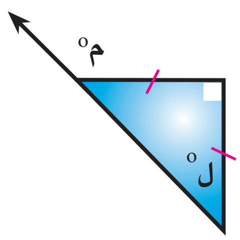
ن = ... هـ = ...

د



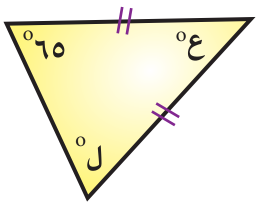
س = ... ، ص = ... ، ع = ...

هـ



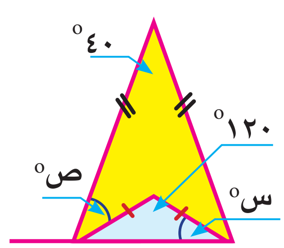
ل = ... ، م = ...

و



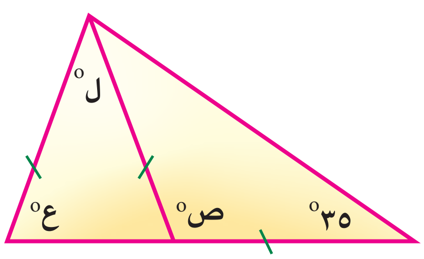
ل = ... ، ع = ...

ز



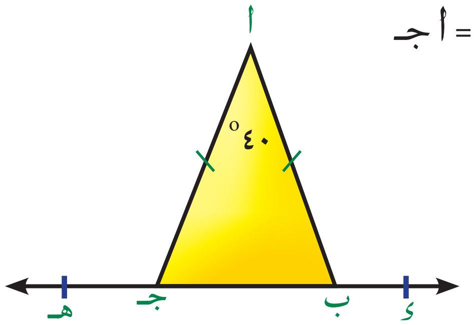
س = ... ، ص = ...

ح



ص = ... ، ل = ... ، ع = ...

٢ في الشكلِ المقابل أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ
و ق(∠ أ) = ٤٠°، ء ∈ $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$



أولاً: **أوجد** ق(∠ أ ب جـ)

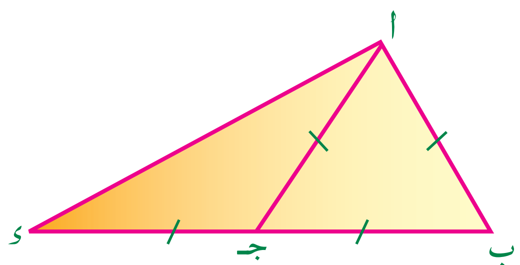
ثانيًا: **اثبت أن** ∠ أ ب ء ≡ ∠ أ جـ هـ

فكّر هل مكملاتُ الزوايا المتساوية في القياسِ تكون متساويةَ القياس؟

نتيجة

إذا كان المثلثُ متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقةً ويكون قياسُ كلٍّ منها ٦٠°

مثال (١)



في الشَّكل المقابل: أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع.

ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ بحيث ب جـ = جـ ء .

اثبت أن $\overline{\text{ب أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

المعطيات : أ ب = ب جـ = أ جـ = جـ ء ، ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

المطلوب : إثبات أن: $\overline{\text{ب أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

البرهان : ∵ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع .

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ ب) = ٦٠° نتيجة

∵ ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ∴ ∠ ب جـ أ خارجة عن △ أ جـ ء

ق(∠ ب جـ أ) = ق(∠ جـ أ ء) + ق(∠ جـ ء أ) = ٦٠° (١)

في △ أ جـ ء

∵ أ جـ = جـ ء ∴ ق(∠ جـ أ ء) = ق(∠ جـ ء أ) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: ق(∠ جـ أ ء) = ق(∠ جـ ء أ) = ٣٠°

∵ ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ ب أ جـ) + ق (∠ جـ أ ء)

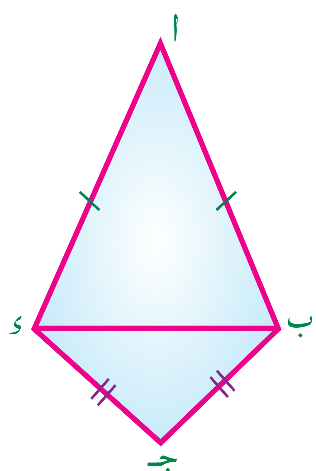
∴ ق (∠ ب أ ء) = ٦٠° + ٣٠° = ٩٠°

∴ $\overline{\text{ب أ}} \perp \overline{\text{أ ء}}$ وهو المطلوب

لاحظ أن: قياسُ أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها.

مثال

٢ في الشكل المقابل: أ ب = أ ء ، ب جـ = جـ ء



اثبت أن ∠ أ ب جـ ≡ ∠ أ ء جـ

المعطيات : أ ب = أ ء ، ب جـ = جـ ء

المطلوب : إثبات أن ∠ أ ب جـ ≡ ∠ أ ء جـ

البرهان : في △ أ ب ء

∵ أ ب = أ ء

∴ ق (∠ أ ب ء) = ق(∠ أ ء ب) (١)

في △ جـ ب ء

∵ جـ ب = جـ ء

∴ ق (∠ جـ ب ء) = ق(∠ جـ ء ب) (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن:

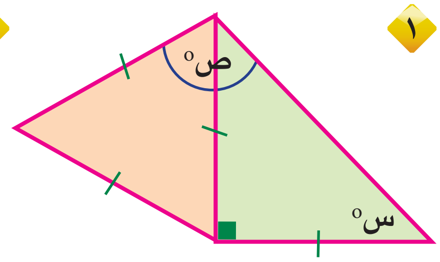
ق (∠ أ ب ء) + ق(∠ جـ ب ء) = ق (∠ أ ء ب) + ق(∠ جـ ء ب)

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ ء جـ)

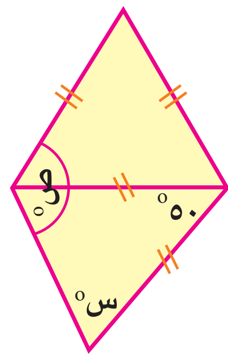
، ∠ أ ب جـ ≡ ∠ أ ء جـ وهو المطلوب.

تدرب

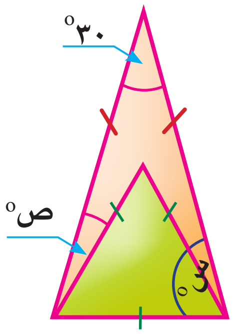
فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية أوجد قيمةَ الرمز المستخدم لقياس الزاوية:

١ 

س = ... ، ص = ...

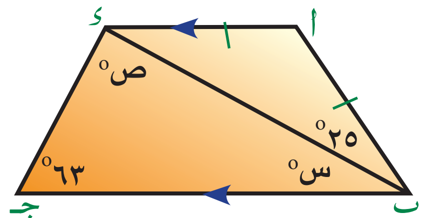
٢ 

س = ... ، ص = ...

٣ 

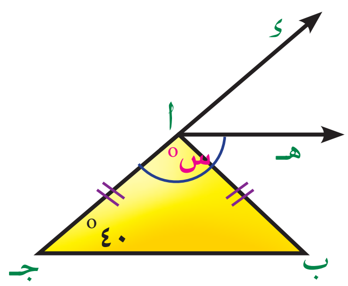
س = ... ، ص = ...

٤ $\overline{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$



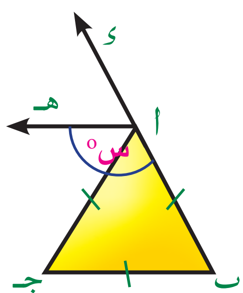
س = ... ، ص = ...

٥ $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$



س = ...

٦ $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ منصف ∠ جـ أ ى



س = ...

نشاط ارسم المثلث أ ب جـ فيه ب جـ = ٧ سم، ق (∠ ب) = ق (∠ جـ) = ٥٠° ثم قس طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، كرر النشاط باختيار قياسات أخرى لطول ب جـ وقياس زاويتى ب، جـ و أكمل الجدول:

رقم المثلث	ب جـ	ق (∠ ب)	ق (∠ جـ)	أ ب	أ جـ
١	٧سم	٥٠°	٥٠°	....	....
٢	....	....	....	....	....
٣	....	....	....	....	....
٤	....	....	....	....	....

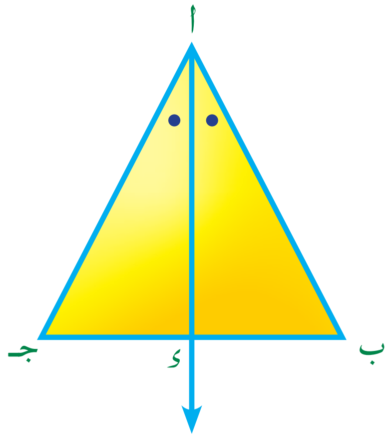
١ هل طول $\overline{\text{أ ب}}$ = طول $\overline{\text{أ جـ}}$ ؟

٢ هل $\overline{\text{أ ب}}$ ≡ $\overline{\text{أ جـ}}$ ؟

٣ كيف يمكنك تفسيرُ هذه النتائج هندسيًّا؟

نظرية (٢)

إذا تطابقت زاويتان فى مثلثٍ فإن الضلعينِ المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ، ويكون المثلث متساوى الساقين.



المعطيات: △ أ ب جـ فيه ∠ ب ≡ ∠ جـ

المطلوب: إثبات أن $\overline{\text{أ ب}}$ ≡ $\overline{\text{أ جـ}}$

العمل: ننصف ∠ ب أ جـ بالمنصف $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ يقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ء

البرهان: ∵ ∠ ب ≡ ∠ جـ

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)

∵ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

∴ ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ جـ أ ء)

∵ مجموعُ قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ أ ء جـ)

∴ المثلثان أ ء ب ، أ ء جـ فيهما

- $\overline{\text{أ ء}}$ ضلع مشترك
- ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ جـ أ ء)
- ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ أ ء جـ)

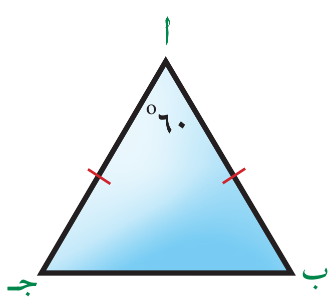
∴ △ أ ء ب ≡ △ أ ء جـ

وينتج من التطابق أن $\overline{\text{أ ب}}$ ≡ $\overline{\text{أ جـ}}$

ويكون △ أ ب جـ متساوى الساقين.

نتيجة

إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الأضلاع.



فى الشَّكل المقابل أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه:

أ ب = أ جـ ، ق (∠ ب أ جـ) = ٦٠°

أكمل ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ جـ ب) = ...

أى أن: ∠ .... ≡ ∠ .... ≡ ....

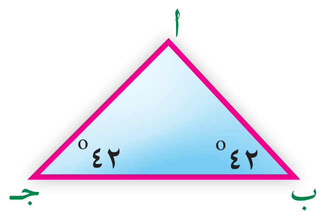
∴ △ أ ب جـ هو مثلث ....

لاحظ أن: المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون متساوى الأضلاع.

تدرب

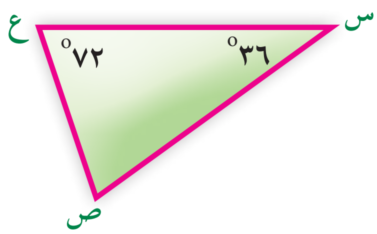
١ فى كلٍّ من الأشكال الآتيةِ اكتب أضلاع المثلث المتساوية فى الطول كما فى المثال :

١



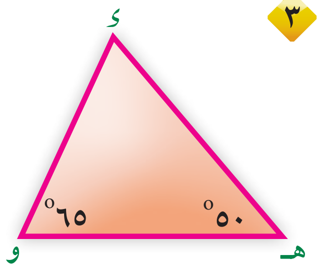
أ ب = أ جـ

٢



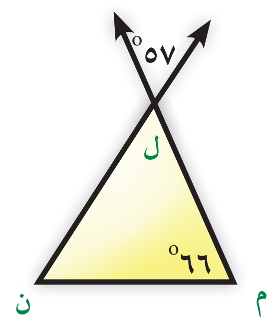
.... = ...

٣



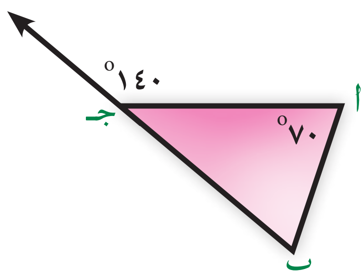
.... = ...

٤



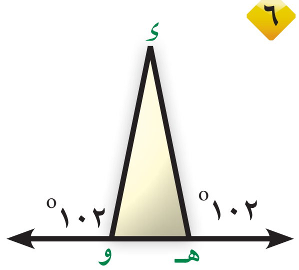
.... = ...

٥



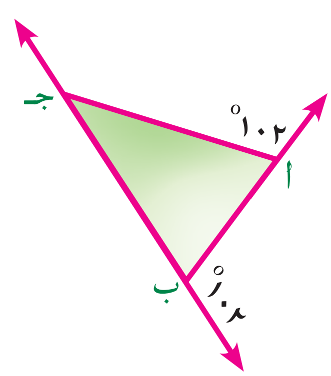
.... = ...

٦



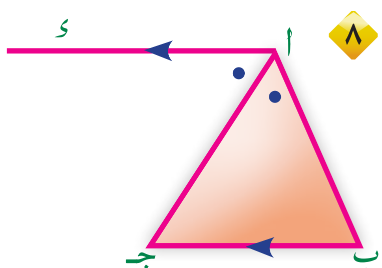
.... = ...

٧



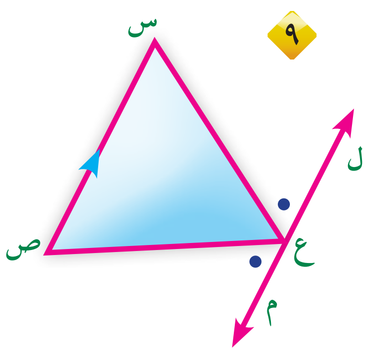
.... = ...

٨



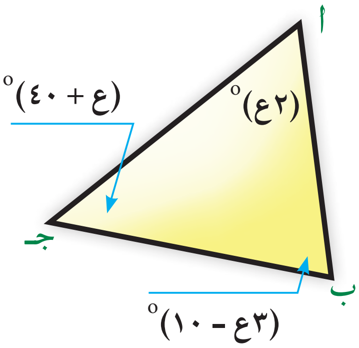
.... = ...

٩



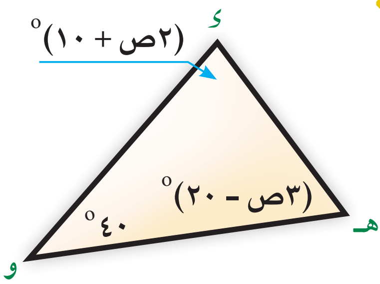
.... = ...

١٠



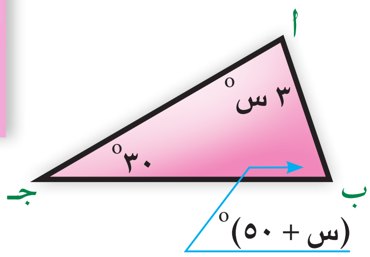
.... = ...

١١



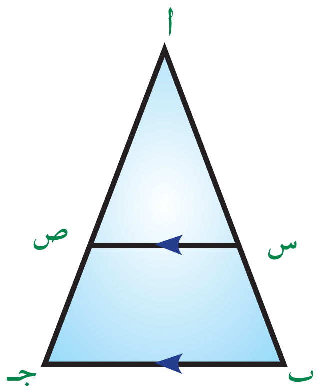
.... = ...

١٢



.... = ...

أمثلة



١ في الشَّكل المقابل: أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

اثبت أن △ أ س ص متساوي الساقين.

المعطيات: أ ب = أ جـ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: **إثبات أن** أ س = أ ص

البرهان: في △ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ جـ ب) (١)

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ أ س ص) = ق(∠ أ ب جـ) **بالتناظر** (٢)

بالمثل ∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ أ ص س) = ق(∠ أ جـ ب) **بالتناظر** (٣)

من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن:

ق (∠ أ س ص) = ق (∠ أ ص س)

في △ أ س ص

∵ ق (∠ أ س ص) = ق (∠ أ ص س)

∴ أ س = أ ص

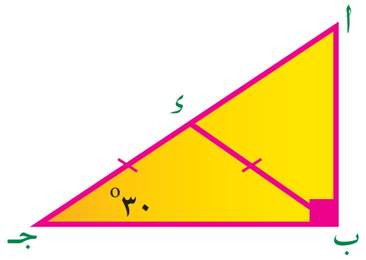
أي أن المثلث أ س ص متساوي الساقين **وهو المطلوب**

فكِّر هل يمكنُ استنتاجُ أن س ب = ص جـ؟ فسر إجابتك.

٢ في الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، ق (∠ جـ) = ٣٠°،

ى ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث ى ب = ى جـ



اثبت أن △ أ ب ى متساوى الأضلاع.

المعطيات: ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°، ق (∠ جـ) = ٣٠°، ى ب = ى جـ

المطلوب: إثبات أن أ ب = ب ى = أ ى

البرهان: في △ ى ب جـ ∵ ى ب = ى جـ

∴ ق (∠ ى ب جـ) = ق (∠ جـ) = ٣٠°

في △ أ ب جـ ∵ ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°، ق (∠ ى ب جـ) = ٣٠°

∴ ق (∠ ب أ ى) = ٩٠° - ٣٠° = ٦٠° (١)

∵ ∠ أ ى ب خارجة عن △ ب ى جـ

∴ ق (∠ أ ى ب) = ق (∠ ى ب جـ) + ق (∠ ى جـ ب)

ق (∠ أ ى ب) = ٣٠° + ٣٠° = ٦٠° (٢)

في △ أ ب ى ∵ مجموع قياسات زوايا △ الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (∠ أ ب ى) = ١٨٠° - (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠° (٣)

من (١)، (٢)، (٣) ∴ ق (∠ أ ب ى) = ق (∠ أ ى ب) = ق (∠ أ)

أي أن ∠ أ ب ى ≡ ∠ أ ى ب ≡ ∠ أ

∴ المثلث أ ب ى متساوى الأضلاع **أي أن** أ ب = ب ى = أ ى.

الوحدة الرابعة

الدرس الرابع

نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

فكِّر وناقِش

سوف تتعلم

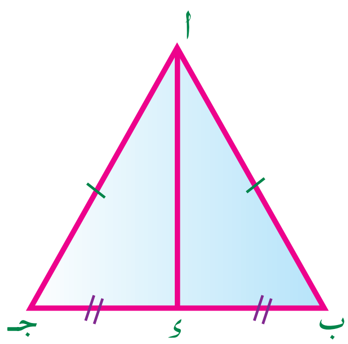
- نتائجُ على نظرياتِ المثلث المتساوى الساقين.

المصطلحات الأساسية

- مثلث متساوى الساقين.
- منصف زاوية الرأس.
- منصف قاعدة المثلث.
- محور تماثل القطعة المستقيمة.

نتيجة (١)

متوسِّطُ المثلثِ المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينـصف زاوية الرأس ويكون عموديًا على القاعدة



فى الشَّكل المقابل

△ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ

، $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فيه

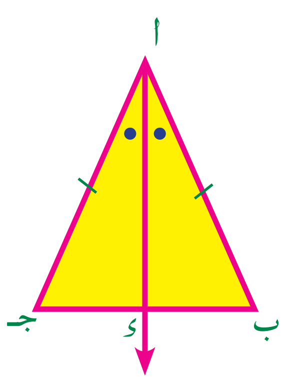
فإن: $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

لاحظ أن: △ أ ء ب ≡ △ أ ء جـ لماذا؟

نتيجة (٢)

منـصفُ زاويةِ الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينـصفُ القاعدة ويكونُ عموديًا عليها.



فى الشكل المقابل:

△ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ،

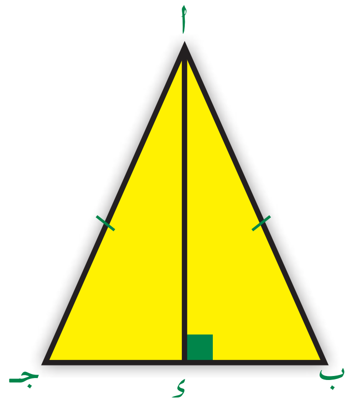
$\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

فإن ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

لاحظ أن △ أ ء ب ≡ △ أ ء جـ لماذا؟

نتيجة (٣)

المستقيمُ المرسومُ من رأس المثلث المتساوى الساقين عموديًا على القاعدةِ ينـصف كلاًّ من القاعدة وزاويةالرأس.



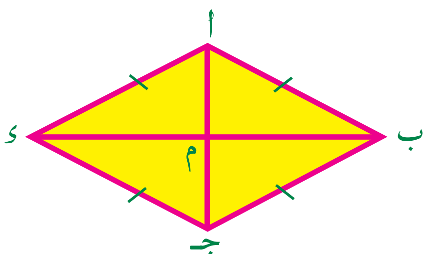
فى الشَّكل المقابل:

△ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

فإن ء تنصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ جـ أ ء)

لاحظ أن △ أ ء ب ≡ △ أ ء جـ لماذا؟

فكّر



فى الشَّكل المقابل:

أ ب جـ ء شكل رباعى جميع أضلاعه متساوية فى الطول.

هذا الشكل يسمى معين ، قطراه $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

يتقاطعان فى نقطة م.

لاحظ: △ أ ب ء ≡ △ جـ ب ء لماذا؟

∴ ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ جـ ب ء)

فى △ أ ب جـ ، أ ب = ب جـ ، $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

∴ $\overline{\text{ب م}}$ ⊥ .... ، م منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

في △ ب أ ء ، أ ب = أ ء ، $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$

∴ $\overleftarrow{\text{أ م}}$ ينصف ∠ .... ، م منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

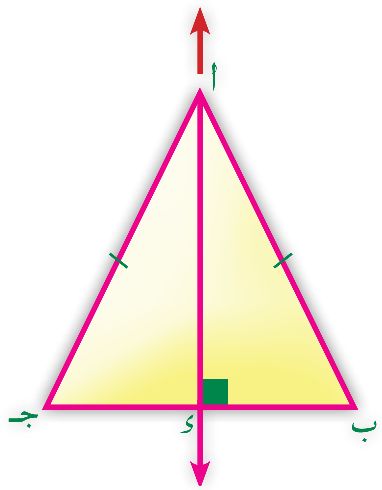
هل قطرا المعين متعامدان؟

هل قطرا المعين ينصف كل منهما الآخر؟

هل قطر المعين ينصف زاويتى الرأس الواصل بينهما؟ سجِّل إجابتك .

محاورُ التَّماثل

أولاً: محورُ التماثلِ للمثلثِ المتساوى الساقين



محور تماثل المثلث المتساوى الساقين هو المستقيمُ المرسوم من رأسه عموديًّا على قاعدته.

فى الشكل المقابل:

$\triangle$ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ، $\overline{\text{أ ى}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

فإن $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ هو محور تماثل للمثلث أ ب جـ المتساوى الساقين.

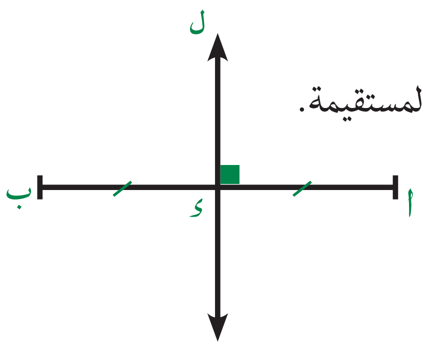
ناقش:

هل يوجدُ للمثلثِ المتساوى الساقين أكثرُ من محور تماثل؟

كم عددُ محاورِ التماثل فى المثلث المتساوى الأضلاع؟

هل توجد للمثلثِ المختلفِ الأضلاع محاورُ تماثل؟

ثانيًا: محور تماثل القطعة المستقيمة:



يسمى المستقيم العمودى على قطعة مستقيمة من منتصفها محور تماثل لهذه القطعة المستقيمة وللاختصار يسمى محور القطعة المستقيمة.

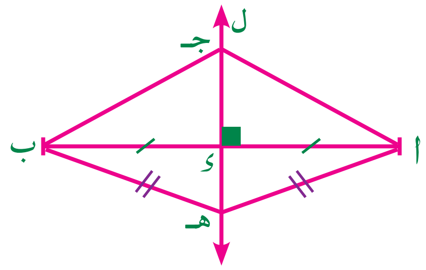
فى الشَّكل المقابل:

إذا كانت ى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، المستقيم ل $\perp$ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث ى $\in$ ل

فإن المستقيم ل هو محور $\overline{\text{أ ب}}$

خاصيَّة هامة

أىُّ نقطةٍ على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها.



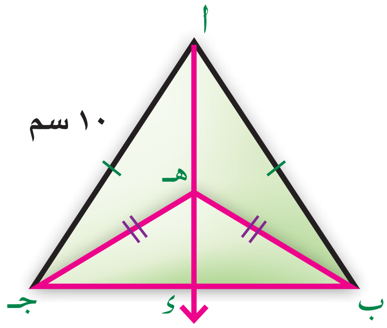
لاحظ أن:

١ إذا كانت جـ $\in$ ل فإن أ جـ = ب جـ

٢ إذا كان هـ أ = هـ ب فإن هـ $\in$ ل لماذا؟

مثال

١ فى الشَّكل المقابل



أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، هـ ب = هـ جـ

$\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب جـ}}$ = {ء}

فإذا كان ب جـ = ٦سم، أوجد طول كل من $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$

المعطيات : أ ب = أ جـ، هـ ب = هـ جـ

المطلوب : إيجاد جـ ء ، أ ء

البرهان : ∵ أ ب = أ جـ ∴ أ تقع على محور $\overline{\text{ب جـ}}$

∵ هـ ب = هـ جـ ∴ هـ تقع على محور $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ هو محور $\overline{\text{ب جـ}}$

ويكون ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∵ ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، ب جـ = ٦سم ∴ جـ ء = ٣سم

∵ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

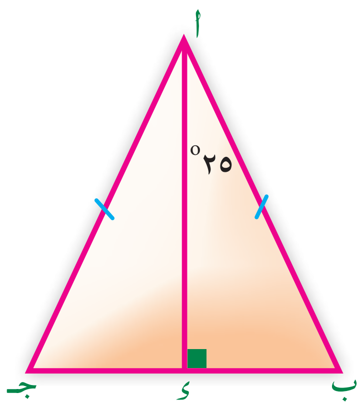
∴ فى △ أ ء جـ القائم الزاوية فى ء

(أ ء)^{٢} = (أ جـ)^{٢} - (جـ ء)^{٢}

(أ ء)^{٢} = ١٠٠ - ٩

∴ أ ء = $\sqrt{٩١}$ سم

٢ فى الشَّكل المقابل



أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ،

$\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (∠ ب أ ء) = ٢٥°،

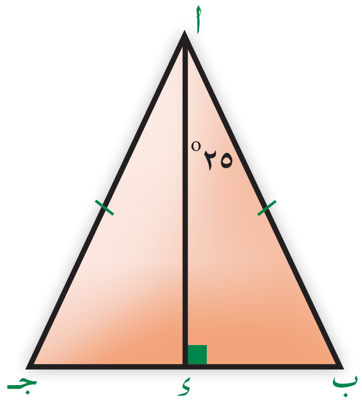
ب جـ = ٤سم **أوجد**

أ ق(∠ ء أ جـ) **ب** طول $\overline{\text{ء جـ}}$

الحل

المعطيات: أ ب = أ جـ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (∠ ب أ ء) = ٢٥° ، ب جـ = ٤سم

المطلوب: ق (∠ ء أ جـ)، طول $\overline{\text{ء جـ}}$.



البرهان : في △ أ ب جـ

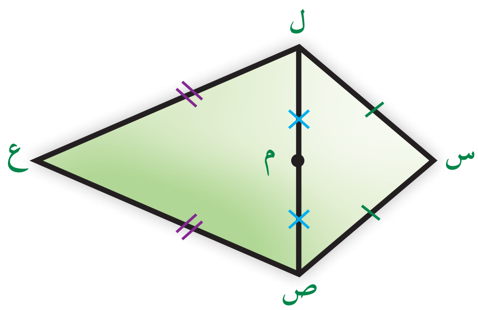
∵ أ ب = أ جـ ، أ ء ⊥ ب جـ

∴ أ ء ينصف القاعدة ب جـ وينصف ∠ ب أ جـ

∴ ق (∠ ء أ جـ) = ق (∠ ء أ ب) = ٢٥°،

ء جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ = $\frac{4}{2}$ = ٢سم.

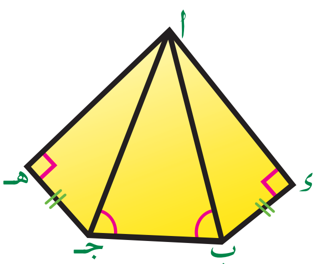
تدرب



١ في الشَّكل المقابل

س ص = س ل ، ع ص = ع ل ، ل م = ص م

أثبت أن س ، م ، ع على استقامة واحدة.



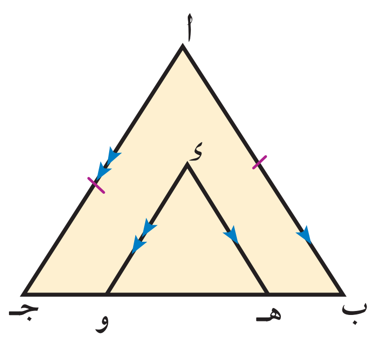
٢ في الشكل المقابل:

ب ء = جـ هـ

ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ جـ ب)

ق (∠ ء) = ق (∠ هـ) = ٩٠°

برهن أن: ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ جـ أ هـ)



٣ في الشَّكل المقابل:

أ ب = أ جـ، ء هـ // أ ب

ء و // أ جـ

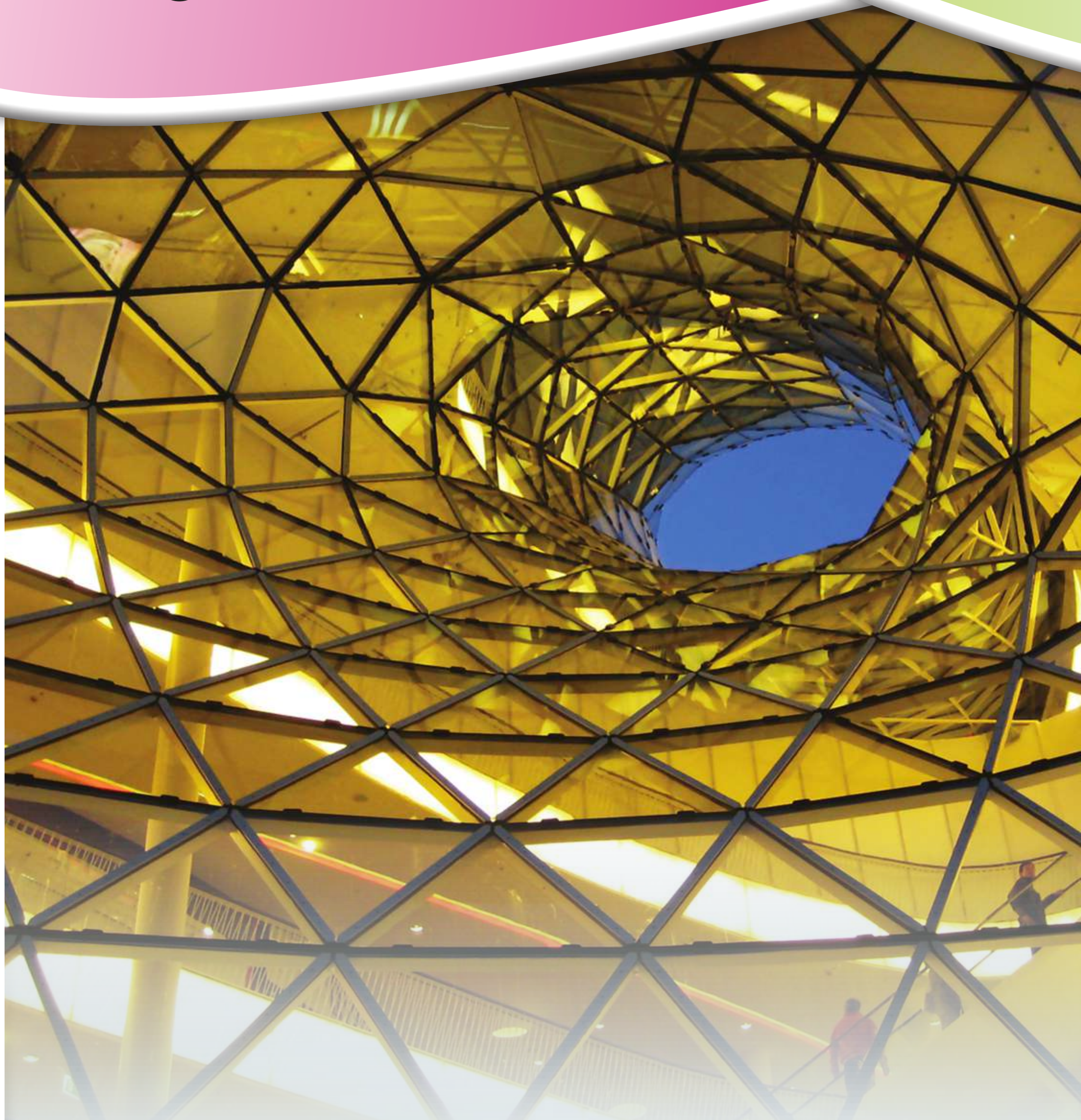
اثبت: أولًا: ء هـ = ء و

ثانيًا: ق (∠ ب أ جـ) = ق (∠ هـ ء و)

الوحدة الخامسة

٥

التباين



الوحدة الخامسة: الدرس الأول

التباين

فكِّر وناقِش

سوف تتعلم

- مفهوم التباين.
- مسلماتُ التباين.

المصطلحات الأساسية

- تباين
- مسلمة
- أكبر من >
- أصغر من <
- يساوى =

مفهومُ التَّباين

١ هل جميعُ تلاميذ فصلك لهم نفس الطول؟

٢ هل هناك اختلافٌ بين قياسِ الزاوية الحادَّة والزاوية القائمة والزاوية المنفرجة؟

ماذا يعنى هذا الاختلاف؟

لاحظ أن:

التباين يعنى وجودَ اختلافٍ فى أطوال التلاميذ، وفى قياسات الزوايا، ويعبِّر عنه بعَلاقة التباين ، والتى تستخدم للمقارنة بين عددين مختلفين.

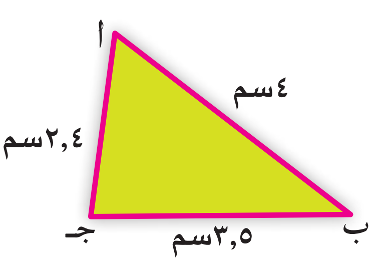
أمثلة

١ **إذا كانت:** ∠ أ ب جـ حادة **فإن:** ق (∠ أ ب جـ) < ٩٠°

٢ **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث فيه

أ ب = ٤سم، ب جـ = ٣,٥ سم،

أ جـ = ٢,٤ سم



فإن: أ ب > ب جـ ، ب جـ > أ جـ

أى أن أ ب > ب جـ > أ جـ

تدرب

في الشكل المقابل أوجد: ق (∠ أ جـ ب) ، ق (∠ أ جـ ء)،

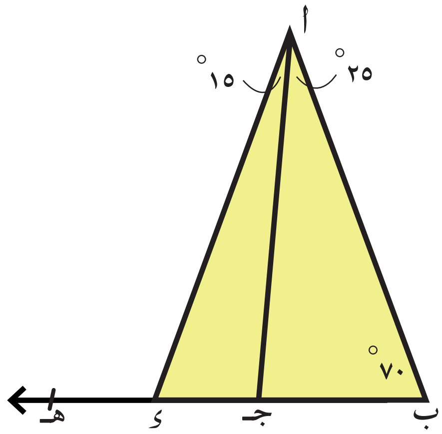
ق (∠ أ ء هـ) ثم أكمل باستخدام > أو <:

ق (∠ أ ء هـ) .... ق (∠ جـ أ ء)

ق (∠ أ ء جـ) .... ق (∠ أ جـ ب)

ق (∠ أ جـ ء) .... ق (∠ أ ب جـ)

ق (∠ أ جـ ء) .... ق (∠ أ ء هـ)



لاحظ أن: جميعُ العلاقاتِ السابقة تسمى متباينات.

مسلماتُ التباين

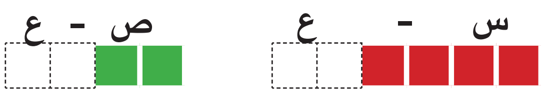
لأيِّ ثلاثة أعداد س ، ص، ع:

١ **إذا كان:** س > ص

فإن: س + ع > ص + ع

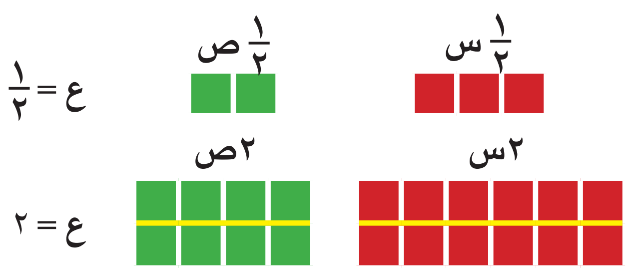
٢ **إذا كان:** س > ص

فإن: س - ع > ص - ع



٣ **إذا كان:** س > ص ، ع عددًا موجبًا

فإن: س ع > ص ع



٤ **إذا كان:** س > ص ، ص > ع

فإن: س > ع

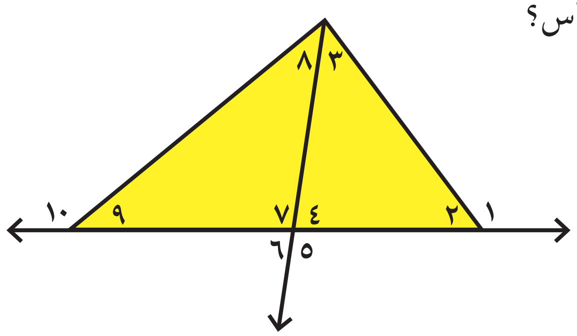
٥ **إذا كان:** س > ص ، أ > ب

فإن: س + أ > ص + ب

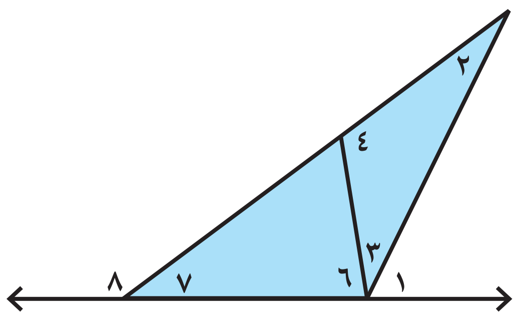
تذكر أن: قياس أى زاوية خارجة للمثلثِ أكبر من قياس أىِّ زاويةٍ داخلة ماعدا المجاورة لها.

تدرب

١ في الشكل المقابل: أى من الزوايا التالية لها أكبر قياس؟



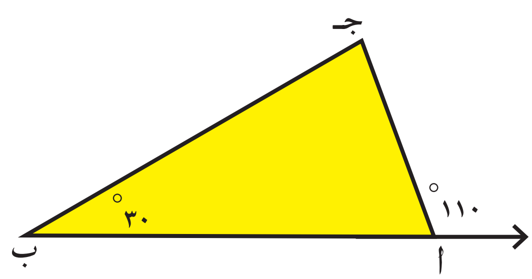
- **أ** ∠١ ، ∠٣ ، ∠٤
- **ب** ∠٤ ، ∠٨ ، ∠٩
- **جـ** ∠٢ ، ∠٣ ، ∠٧
- **د** ∠٧ ، ∠٨ ، ∠١٠

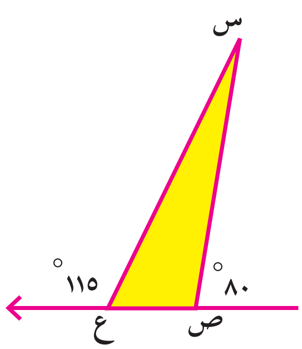


٢ في الشكل المقابل عين:

- **أ** جميع الزوايا التى قياسها أقل من ق (∠١)
- **ب** جميع الزوايا التى قياسها أكبر من ق (∠٦)
- **جـ** جميع الزوايا التى قياسها أقل من ق (∠٤)

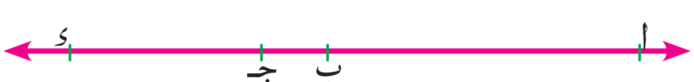
٣ رتِّب قياساتِ زوايا المثلث أ ب جـ تصاعديًا، قياسات زوايا المثلث س ص ع تنازليًا.





ق (∠ ....) < ق (∠ ....) < ق (∠ ....) ق (∠ ....) > ق (∠ ....) > ق (∠ ....)

٤ في الشَّكل المقابل: جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

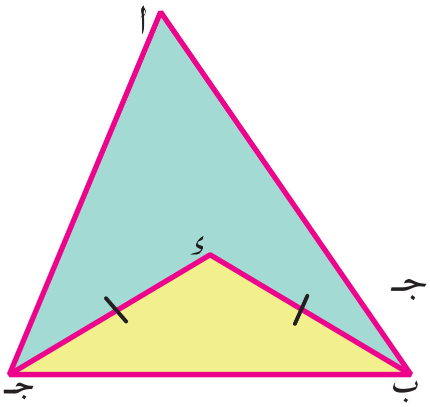


فإذا كان: أ ب > جـ ء

فإن: أ جـ ...... ب ء

مثال

فى الشكل المقابل:



ق(∠ أ جـ ب) > ق(∠ أ ب جـ)، ى ب = ى جـ

اثبت أن: ق(∠ أ جـ ى) > ق(∠ أ ب ى)

المعطيات: ق(∠ أ جـ ب) > ق(∠ أ ب جـ)، ى ب = ى جـ

المطلوب: إثبات أن: ق(∠ أ جـ ى) > ق(∠ أ ب ى)

البرهان: ∵ ى ب = ى جـ

∴ ق(∠ ى جـ ب) = ق(∠ ى ب جـ) (١)

∵ ق(∠ أ جـ ب) > ق(∠ أ ب جـ) (٢)

∴ بطرح (١) من (٢) ينتج أن:

ق(∠ أ جـ ب) - ق(∠ ى جـ ب) > ق(∠ أ ب جـ) - ق(∠ ى ب جـ)

∴ ق(∠ أ جـ ى) > ق(∠ أ ب ى) **وهو المطلوب**

الوحدة الخامسة

الدرس الثانى

المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث

فكّر وناقِش

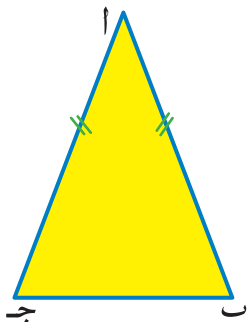
سوف تتعلم

- المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث.

المصطلحات الأساسية

- زاوية .
- قياس زاوية.
- أكبر زاوية فى مثلث .
- أصغر زاوية فى مثلث .
- أكبر ضلع فى مثلث .
- أصغر ضلع فى مثلث .

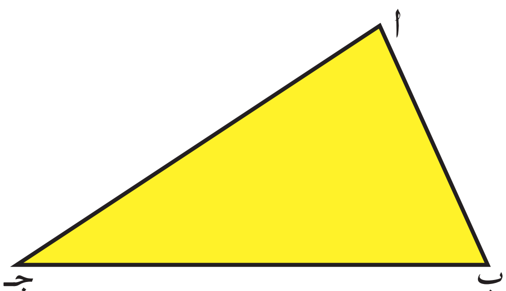
نشاط



١ **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أب = أ جـ

- عند طى المثلث بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس جـ،
  ماذا تلاحظ على قياس الزاويتين ب، جـ المقابلتين للضلعين $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أب}$ المتساويين فى الطول؟
- عند طى المثلث بحيث ينطبق الرأسين أ، جـ ، ماذا تلاحظ على قياس الزاويتين المقابلتين للضلعين $\overline{بجـ}$ ، $\overline{أب}$ المختلفين فى الطول؟
- هل اختلاف طولا ضلعين فى المثلث يؤدى إلى اختلاف قياسا الزاويتين المقابلتين لهما؟

٢ ارسم المثلث أ ب جـ مختلف الأضلاع.



- إطوى المثلث بحيث ينطبق الرأس أ على الرأس ب ماذا تلاحظ على قياس الزاويتين أ، ب المقابلتين للضلعين $\overline{بجـ}$ ، $\overline{أجـ}$ المختلفين فى الطول؟
- كرر هذا العمل بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس جـ ماذا تلاحظ ؟
- هل يوجد فى هذا المثلث زوايا متساوية فى القياس؟

لاحظ أن: إذا اختلفت أطوال أضلاع المثلث تختلف قياسات زواياه المقابلة لهذه الأضلاع.

نشاط

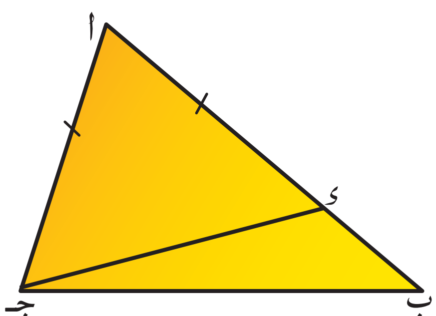
ارسم المثلث أ ب جـ مختلف الأضلاع ثم قس أطوال أضلاعه الثلاثة ، وقياسات زواياه المناظرة ثم أكمل الجدول التالى:

أطوال الأضلاع	قياسات الزوايا المقابلة
أ ب = ... سم	ق (∠ جـ) = ... °
ب جـ = ... سم	ق (∠ أ) = ... °
جـ أ = ... سم	ق (∠ ب) = ... °

ماذا تلاحظ؟

نظرية (٣)

إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول يقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للآخر.



المعطيات: △ أ ب جـ فيه أ ب > أ جـ

المطلوب: إثبات أن: ق (∠ أ جـ ب) > ق (∠ أ ب جـ)

العمل: نأخذ ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أ ء = أ جـ

البرهان: △ أ جـ ء فيه أ ء = أ جـ

∴ ق (∠ أ جـ ء) = ق (∠ أ ء جـ) (١)

∵ ∠ أ ء جـ خارجة عن △ ب ء جـ

∴ ق (∠ أ ء جـ) > ق (∠ ب) (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن

ق (∠ أ جـ ء) > ق (∠ ب)

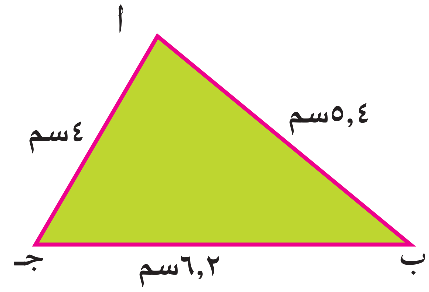
فيكون ق (∠ أ جـ ب) > ق (∠ أ جـ ء)

∴ ق (∠ أ جـ ب) > ق (∠ أ ب جـ) **وهو المطلوب.**

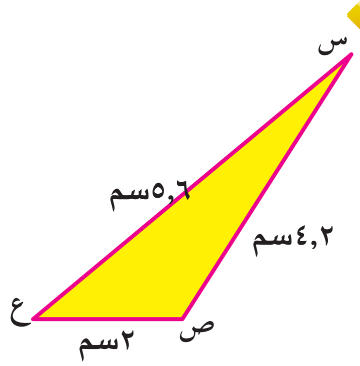
تدرب

في كل من الأشكال التالية اكمل باستخدام (<، >)

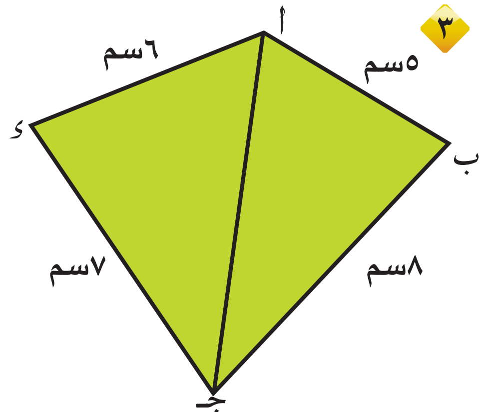
١



٢



٣

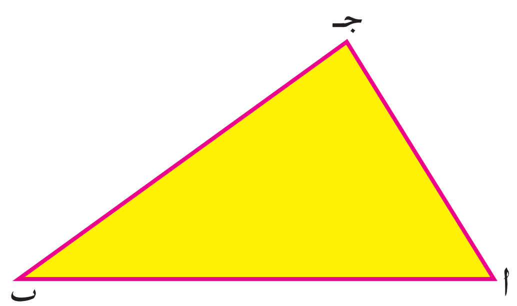


١	٢	٣
ق (∠ أ) ...... ق (∠ ب)	ق (∠ ع) ...... ق (∠ ص)	ق (∠ ب أ جـ) ..... ق (∠ ب جـ أ)
ق (∠ أ) ...... ق (∠ جـ)	ق (∠ س) ...... ق (∠ ص)	ق (∠ ى أ جـ) ..... ق (∠ ى جـ أ)
ق (∠ ب) ...... ق (∠ جـ)	ق (∠ ع) ...... ق (∠ س)	ق (∠ ب أ ى) ..... ق (∠ ب جـ ى)

لاحظ أن: قياس أكبر زاوية فى المثلث > ٦٠°

قياس أصغر زاوية فى المثلث < ٦٠° **لماذا؟**

مثال



فى الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث فيه أ ب > ب جـ > جـ أ

برهن أن: ق (∠ جـ) > ق (∠ أ) > ق (∠ ب)

المعطيات: أ ب > ب جـ > جـ أ

المطلوب: إثبات أن ق (∠ جـ) > ق (∠ أ) > ق (∠ ب)

البرهان: فى △ أ ب جـ

∵ أ ب > ب جـ ∴ ق (∠ جـ) > ق (∠ أ) (١)

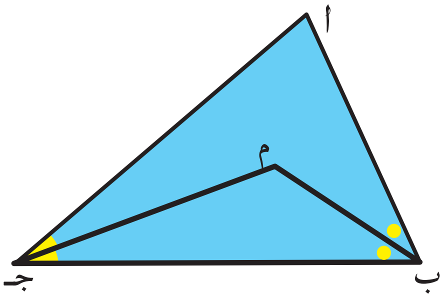
∵ ب جـ > جـ أ ∴ ق (∠ أ) > ق (∠ ب) (٢)

من (١)، (٢) وباستخدام مسلمات التباين ينتج أن:

ق (∠ جـ) > ق (∠ أ) > ق (∠ ب)

تذكر أن: أكبر أضلاع المثلث طولاً يقابل أكبر زوايا المثلث فى القياس
وأصغر أضلاع المثلث طولاً يقابل أصغر زوايا المثلث فى القياس.

مثال



فى الشَّكل المقابل:

أ ب جـ مثلث، $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب جـ، $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ أ جـ ب

فإذا كان: م جـ > م ب

برهن أن: ق (∠ أ ب جـ) > ق (∠ أ جـ ب)

المعطيات: $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب جـ، $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ أ جـ ب

، م جـ > م ب.

المطلوب: إثبات أن ق (∠ أ ب جـ) > ق (∠ أ جـ ب)

البرهان: فى △ م ب جـ

∵ م جـ > م ب   ∴ ق (∠ م ب جـ) > ق (∠ م جـ ب)   **(١)**

فى △ أ ب جـ

∵ $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب جـ   ∴ ق (∠ م ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ ب جـ)   **(٢)**

∵ $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ أ جـ ب   ∴ ق (∠ م جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ جـ ب)   **(٣)**

∴ من **(١)**، **(٢)**، **(٣)**: $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ ب جـ) > $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ جـ ب)   **من مسلمات التباين**

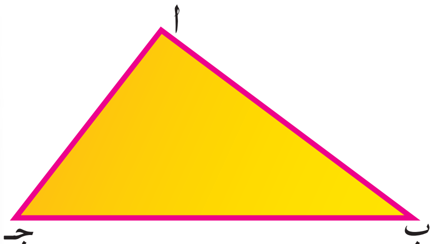
∴ ق (∠ أ ب جـ) > ق (∠ أ جـ ب)   **وهو المطلوب**

الدرس الثالث

المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث

فكر وناقش

نشاط ١ **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث زواياه مختلفة فى القياس.



- اطو المثلث بحيث ينطبق الرأس أ على الرأس ب. ماذا تلاحظ على طولى الضِّلعين ب جـ ، أ جـ المقابلين للزاويتين أ، ب المختلفتين فى القياس؟
- كرر هذا العمل بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس جـ، ماذا تلاحظ ؟
- عندما ينطبق الرأس جـ علي الرأس أ، ماذا تلاحظ ؟
- هل يوجد فى هذا المثلث أضلاع متساوية فى الطول؟

لاحظ أن: إذا اختلفت قياسات زوايا المثلث تختلف أطوال أضلاعه المقابلة لهذه الزوايا.

نشاط ٢ ارسم المثلث أ ب جـ بحيث تكون زواياه مختلفة فى القياس، ثم قس أطوال الأضلاع المقابلة وأكمل الجدول الآتى:

قياسات الزوايا	أطوال الأضلاع المقابلة له
ق(∠ أ) = ...°	ب جـ = ... سم
ق(∠ ب) = ...°	جـ أ = ... سم
ق(∠ جـ) = ...°	أ ب = ... سم

ماذا تلاحظ؟

- هل أكبر زاوية فى القياس يقابلها أكبرُ ضلع فى الطول؟ وأصغر زاوية فى القياس يقابلها أصغر ضلع فى الطول؟
- هل يمكن ترتيبُ أطوالِ أضلاع المثلث تصاعديًّا أو تنازليًّا تبعًا لقياسات الزوايا المقابلة لها؟

سوف تتعلم

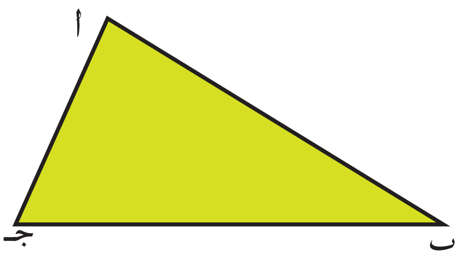
- المقارنة بين أطوال الأضلاع فى مثلث.

المصطلحات الأساسية

- أطول ضلع فى مثلث.
- أصغر ضلع فى مثلث.
- أكبر زاوية فى مثلث.
- أصغر زاوية فى مثلث.
- قطعة مستقيمة عمودية.

نظرية (٤)

إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياسِ يقابلها ضلعٌ أكبر فى الطول من الذى يقابل الأخرى .



المعطيات: △ ا ب جـ فيه ق (∠ جـ) > ق (∠ ب)

المطلوب: إثبات أن: ا ب > ا جـ

البرهان: ∵ $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا جـ}}$ قطع مستقيمة

∴ يجب أن تتحقق إحدى الحالات التالية:

(١) ا ب > ا جـ　　(٢) ا ب = ا جـ　　(٣) ا ب < ا جـ

إذا لم تكن ا ب > ا جـ

فإما ا ب = ا جـ　　**أو**　　ا ب < ا جـ

إذا كان ا ب = ا جـ　　**فإن**　　ق (∠ جـ) = ق (∠ ب)

وهذا يخالف المعطيات　**حيث إن**　ق (∠ جـ) > ق (∠ ب)

و إذا كان ا ب < ا جـ　　**فإن**　　ق (∠ جـ) < ق (∠ ب) حسب النظرية السابقة

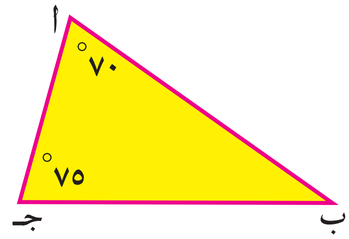
وهذا يخالف المعطيات　**حيث أن**　ق (∠ جـ) > ق (∠ ب)

∴ يجب أن يكون ا ب > ا جـ　　　**وهو المطلوب**

تدرب

فى الأشكال التالية أكمل باستخدام > أو < أو =

١

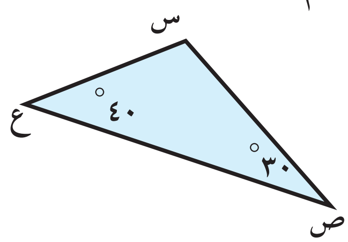


أ ب ...... أ جـ

أ ب ...... ب جـ

أ جـ ...... ب جـ

٢

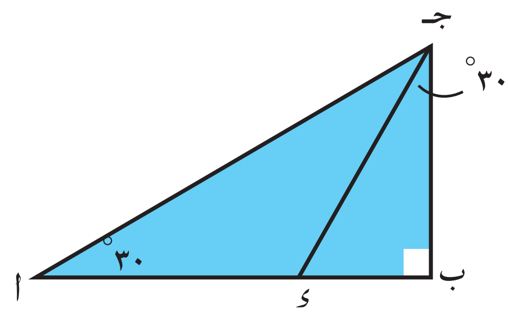


س ص ...... س ع

ص ع ...... س ص

ص ع ...... س ع

٣



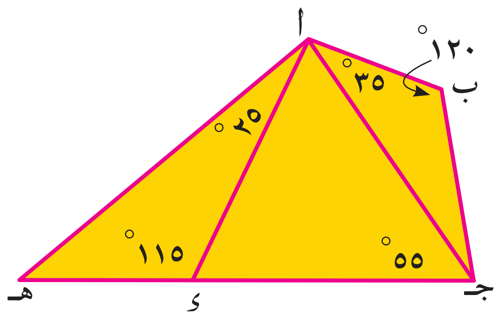
أ جـ .... ب جـ

ب جـ .... ى ب

أ جـ .... ب ى

جـ ى .... أ جـ

٤



ب جـ .... أ ب

جـ ى .... جـ أ

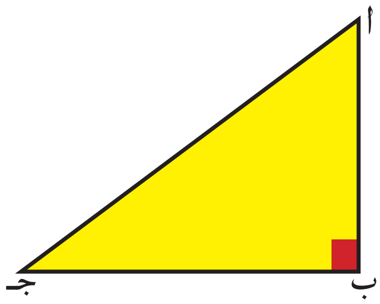
أ ى .... أ هـ

جـ ى .... أ ى

نتائج

نتيجة (١)

فى المثلثِ القائم الزاويةِ يكون الوترُ هو أطول أضلاع المثلث.



فى الشكل المقابل: △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب.

∵ ∠ أ حادة ∴ ق (∠ ب) > ق (∠ أ)

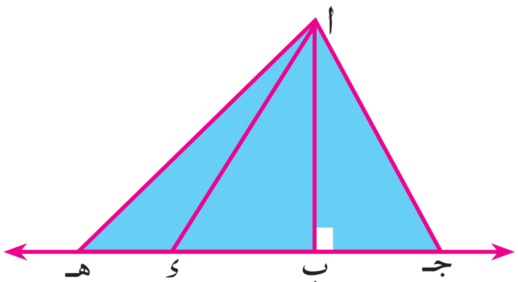
فيكون أ جـ > ب جـ

∵ ∠ جـ حادة ∴ ق (∠ ب) > ق (∠ جـ)

فيكون أ جـ > أ ب

لاحظ أن فى المثلثِ المنفرجِ الزاوية الضّلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أكبر أضلاع المثلث طولًا.

هيّا نفكر



أ جـ > أ ب لماذا؟

أ ء > أ ب لماذا؟

أ هـ > أ ب لماذا؟

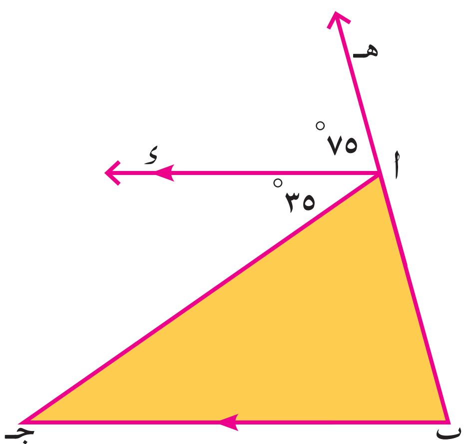
هل طول ضلع القائمة فى المثلث القائم الزاوية أصغر من طول الوتر . لماذا؟

نتيجة (٢)

طولُ القطعةِ المستقيمة العموديَّة المرسومة من نقطةٍ خارجَ مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أى قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم.

تعريف: بُعدُ أى نقطةٍ عن مستقيمٍ معلوم هو طولُ القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم.

مثال



فى الشَّكل المقابل: أ ب جـ مثلث ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$

$\overleftarrow{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، ق (∠ جـ أ ى) = ٣٥°

ق (∠ ى أ هـ) = ٧٥°

برهن أن: أ جـ > أ ب

المعطيات: $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، ق (∠ هـ أ ى) = ٧٥° ، ق (∠ ى أ جـ) = ٣٥°

المطلوب: إثبات أن أ جـ > أ ب

البرهان: ∵ $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ هـ أ ى) = ٧٥° **بالتناظر (١)**

∵ $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ق (∠ ى أ جـ) = ٣٥° **بالتبادل (٢)**

من (١) ، (٢) يكون:

فى المثلث أ ب جـ

ق (∠ أ ب جـ) = ٧٥° ، ق (∠ أ جـ ب) = ٣٥°

أى أن ق (∠ أ ب جـ) > ق (∠ أ جـ ب)

∴ أ جـ > أ ب **وهو المطلوب**

الوحدة الخامسة

الدرس الرابع

متباينة المثلث

فكر وناقش

سوف تتعلم

- متباينة المثلث.

المصطلحات الأساسية

- متباينة.
- متباينة المثلث.

نشاط

باستخدام المسطرة المدرجة والفرجار، حاوِلْ رسم المثلث أ ب جـ حيث:

١ أ ب = ٤سم ، ب جـ = ٥سم ، أ جـ = ٦سم

٢ أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٣سم ، أ جـ = ٢سم

٣ أ ب = ٩سم ، ب جـ = ٤سم ، أ جـ = ٣سم

٤ أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٣سم ، أ جـ = ٥سم

فى أىٍّ من الحالاتِ السابقة أمكنك رسم المثلث، وماذا تستنتج؟

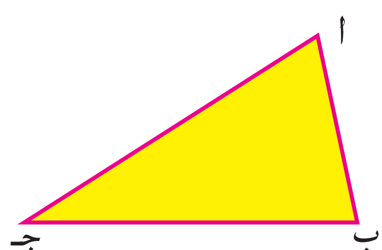
حقيقة: فى أى مثلثٍ يكون مجموعُ طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

أى أن: فى أى مثلث أ ب جـ يكون:

أ ب + ب جـ > أ جـ

ب جـ + جـ أ > أ ب

أ ب + أ جـ > ب جـ



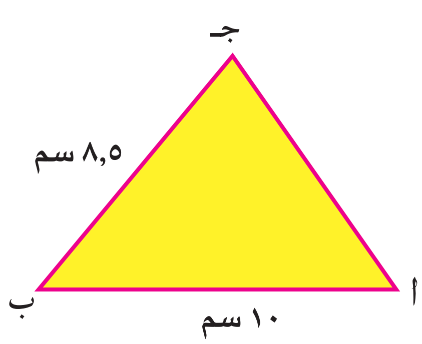
فمثلاً: الأعداد ٥، ٣، ٩ لاتصلح أن تكونَ أطوالَ أضلاع مثلث؛ لأن مجموع أصغر عددين = ٣ + ٥ = ٨، ٨ > ٩ ولاتحقق متباينة المثلث.

مثال

فى المثلث أ ب جـ إذا كان أ ب = ١٠ سم،

ب جـ = ٨,٥ سم

أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع أ جـ.



الحل

أ جـ < أ ب + ب جـ ∴ أ جـ < ١٨,٥ (١)

لكن أ جـ + ب جـ > أ ب **متباينة المثلث**

أ جـ > أ ب - ب جـ ∴ أ جـ > ١,٥ (٢)

من (١)، (٢) ١٨,٥ > أ جـ > ١,٥

∴ أ جـ ∈]١,٥ ، ١٨,٥[

تدرب

أوجد الفترةَ التى ينتمى إليها طولُ الضلّعِ الثالث لكلٍّ من المثلثات التالية إذا كان طولا الضِّلعين الآخرين هما:

أ ٦سم، ٩سم **ب** ٥سم، ١٢سم **جـ** ٧سم، ١٥سم **د** ٢,٩ سم، ٣,٢ سم

الحل

أ ∵ متباينة المثلث

تنص على أن: | مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث |

∴ الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث =]٣ ، ١٥[

لاحظ : لا يمكن اختيار طول الضلع الثالث = ٣ سم (لماذا)

لا يمكن اختيار طول الضلع الثالث = ١٥ سم (لماذا)

ناقِشْ معلمك لإستكمال حلول

(ب) ، (جـ) ، (د)